3

I sistemi lineari

In questo capitolo verranno descritte le proprietà dei sistemi lineari stazionari continui e discreti.

3.1 MOTO E RISPOSTA DEI SISTEMI LINEARI DISCRETI

Si consideri un sistema lineare e stazionario discreto, descritto dal modello ingresso/stato/uscita

$$x(t+1) = A_d\, x(t) + B_d\, u(t), \tag{3.1.1}$$

$$y(t) = C_d\, x(t) + D_d\, u(t), \tag{3.1.2}$$

(identico al modello (1.8.8), (1.8.9) ma stazionario), l'istante iniziale $t_0 = 0$, lo stato iniziale x_0 e la sequenza di ingresso $u(0),\ u(1),\ \ldots$. Al tempo $t = 1$ risulta

$$x(1) = A_d\, x_0 \ +\ B_d\, u(0)$$
$$y(1) = C_d A_d\, x_0 \ +\ C_d B_d\, u(0) \ +\ D_d\, u(1)$$

mentre per $t = 2$ risulta

$$x(2) = A_d^2\, x_0 \ +\ A_d B_d\, u(0) \ +\ B_d\, u(1)$$
$$y(2) = C_d\, A_d^2\, x_0 \ +\ C_d A_d B_d\, u(0) \ +\ C_d B_d\, u(1) \ +\ D_d\, u(2).$$

Più in generale, per un valore generico del tempo, $t = k$, valgono le relazioni

$$x(k) = A_d^k\, x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-i-1}\, B_d\, u(i) \tag{3.1.3}$$

$$y(k) = C_d\, A_d^k\, x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} C_d\, A_d^{k-i-1}\, B_d\, u(i\,) + D_d\, u(k) \tag{3.1.4}$$

che descrivono il moto e la risposta del sistema. Il secondo membro della (3.1.3) è quindi costituito dalla funzione di transizione $\varphi(k, 0, x_0, u[0, k])$ mentre il secondo membro della (3.1.4) è la funzione di risposta $\gamma(k, 0, x_0, u[0, k])$. La matrice di transizione è data da

$$\Phi(k, 0) = A_d^k; \tag{3.1.5}$$

il moto libero ed il moto forzato sono dati, rispettivamente, da

$$\Phi(k, 0)\, x_0 = A_d^k\, x_0 \tag{3.1.6}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-i-1}\, B_d\, u(i\,). \tag{3.1.7}$$

Analogamente le espressioni della risposta libera e della risposta forzata sono

$$y_0(k) = C_d\, A_d^k\, x_0 \tag{3.1.8}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_d\, A_d^{k-i-1}\, B_d\, u(i\,) + D_d\, u(k). \tag{3.1.9}$$

Si consideri ora la funzione discreta $\Delta(t)$, identicamente nulla per ogni $t \neq 0$ e con $\Delta(0) = 1$ (impulso unitario) riportata in Figura 3.1

Figura 3.1 – Impulso unitario

ed un ingresso identicamente nullo ad eccezione della sua componente j–esima posta eguale a $\Delta(t)$, $u_j(t) = \Delta(t)$. La risposta a tale ingresso del sistema (3.1.1), (3.1.2) a partire dallo stato $x(0) = 0$ è data, per ogni $t > 0$, da

$$y(t) = C_d\, A_d^{t-1}\, B_d\, e_j$$

ove e_j indica la j–esima colonna della matrice identità. La matrice

$$W(t) = C_d\, A_d^{t-1}\, B_d \tag{3.1.10}$$

viene detta *risposta impulsiva* del sistema perché la sua colonna j–esima costituisce la risposta del sistema, con stato iniziale zero, all'impulso unitario applicato, per $t = 0$, al suo ingresso j–esimo (mantenendo tutti gli altri ingressi a zero).

Esempio 3.1

Si consideri il sistema lineare stazionario e discreto descritto dalle matrici

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_d = [\ 1 \quad 1\ ] \qquad D_d = [\ 2\ ],$$

lo stato iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e la sequenza di ingresso $u(0) = 1$, $u(1) = -1$, $u(2) = 0$, $u(3) = 2$. Il moto libero del sistema è dato da

$$x_l(1) = A_d\, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad x_l(2) = A_d^2\, x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_l(3) = A_d^3\, x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad x_l(4) = A_d^4\, x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

mentre il moto forzato è dato da

$$x_f(1) = B_d\, u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_f(2) = A_d B_d\, u(0) + B_d\, u(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_f(3) = A_d^2 B_d\, u(0) + A_d B_d\, u(1) + B_d\, u(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_f(4) = A_d^3 B_d u(0) + A_d^2 B_d u(1) + A_d B_d u(2) + B_d u(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Il moto totale, somma del moto libero e di quello forzato, è

$$x(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x(2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x(3) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad x(4) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

La risposta del sistema è data da

$$y(0) = 3, \qquad y(1) = -1, \qquad y(2) = 1, \qquad y(3) = 2.$$

Infine la risposta impulsiva è data da

$$W(1) = C_d B_d = 1, \quad W(2) = C_d A_d B_d = 1, \quad W(3) = C_d A_d^2 B_d = 0,$$

$$W(4) = C_d A_d^3 B_d = 1, \quad W(5) = C_d A_d^4 B_d = -1, \ \ldots$$

3.2 MOTO E RISPOSTA DEI SISTEMI LINEARI CONTINUI

Si consideri un sistema lineare e stazionario continuo, descritto dal modello ingresso/stato/uscita

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\ , \tag{3.2.1}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)\ , \tag{3.2.2}$$

(identico al modello (1.8.6), (1.8.7) ma stazionario), l'istante iniziale $t_0 = 0$, lo stato iniziale x_0 e la funzione di ingresso $u[0, t]$. Il moto libero del sistema è descritto dalla relazione

$$x_l(t) = \varphi(t, 0, x_0, 0) = \Phi(t, 0)\, x_0 \tag{3.2.3}$$

ove la matrice $\Phi(t, 0)$, detta *matrice di transizione*, è data dalla successione

$$\Phi(t, 0) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \ldots + \frac{A^i t^i}{i\,!} + \ldots \tag{3.2.4}$$

cioè dall'esponenziale della matrice dinamica A

$$\Phi(t, 0) = e^{At}\ . \tag{3.2.5}$$

La matrice di transizione risulta non singolare per qualunque matrice A e per ogni valore di t; in particolare, per $t = 0$ risulta $e^{At} = I$. In ogni moto libero è quindi non solo possibile calcolare lo stato finale in funzione di quello iniziale ma anche dedurre lo stato iniziale in funzione di quello finale (invertibilità). Il moto forzato è descritto dall'espressione

$$x_f(t) = \varphi(t, 0, 0, u[0, t]) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{3.2.6}$$

quindi l'espressione completa del moto è

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{3.2.7}$$

mentre quella della risposta è

$$y(t) = C\, e^{At} x_0 + \int_0^t C\, e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau + D\, u(t). \qquad (3.2.8)$$

Il primo termine a secondo membro della (3.2.8) descrive la risposta libera, gli altri due termini quella forzata.

Si consideri ora la funzione $\Delta(t, \tau)$ rappresentata in Figura 3.2 e costituita da un impulso di larghezza τ e ampiezza $1/\tau$ (area unitaria) al tempo $t = 0$. Si supponga ora di rendere infinitesima la larghezza dell'impulso (concettualmente, di fare tendere τ a zero) e di applicare la funzione risultante, $\delta(t)$ all'ingresso j–esimo di un sistema puramente dinamico ($D = 0$) il cui stato iniziale sia nullo ($x(0) = 0$) mantenendo tutti gli altri ingressi a zero.

Figura 3.2 – Approssimazione dell'impulso di Dirac

La risposta del sistema a tale ingresso è data da

$$y(t) = C\, e^{At} b_j$$

essendo b_j la j–esima colonna di B. La matrice

$$W(t) = C\, e^{At} B \qquad (3.2.9)$$

viene detta *risposta impulsiva* del sistema perché la sua colonna j–esima descrive l'andamento dell'uscita del sistema a partire da stato iniziale nullo quando viene applicato al tempo zero un impulso di area unitaria e ampiezza infinitesima (impulso di Dirac) all'ingresso j–esimo mantenendo tutti gli altri ingressi a zero.

Esempio 3.2

Si consideri il sistema lineare stazionario continuo descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C = [\ -1 \quad -1\ ],$$

lo stato iniziale $x(0) = 0$ ed una funzione di ingresso data da un gradino unitario applicato per $t = 0$ ($u(t) = 0$ per $t < 0$, $u(t) = 1$ per $t \geq 0$). La risposta al gradino è costituita dalla sola risposta forzata, data da

$$y(t) = \int_0^t C\, e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

ed è riportata, per t compreso tra 0 e 8 secondi, in Figura 3.3 ove si può osservare come venga raggiunto il valore di regime in circa 5 secondi e come il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale (*tempo di salita*) sia di circa 1.55 secondi.

Figura 3.3 – Risposta al gradino unitario

La risposta impulsiva dello stesso sistema durante i primi 8 secondi è riportata in Figura 3.4 dove si può osservare come questa tenda a zero per $t \to \infty$.

Figura 3.4 – Risposta impulsiva

Figura 3.5 – Evoluzione dello stato iniziale $[2\ 2]^T$

Considerando, infine, lo stato iniziale $x(0) = [2\ 2]^T$, l'evoluzione durante i primi

8 secondi è riportata in Figura 3.5 dove si può notare come venga raggiunto, in tale intervallo di tempo, lo stato finale 0.

3.3 I MODELLI DISCRETI DEI SISTEMI CONTINUI

I sistemi dinamici più diffusi sono quelli continui mentre i modelli di uso più frequente sono quelli discreti; tali modelli vengono utilizzati anche per i sistemi continui perché l'ingresso e l'uscita di tali sistemi vengono spesso rilevati solo in certi istanti di tempo (campionamento).

Per ottenere un modello discreto (3.1.1), (3.1.2) per un sistema continuo (3.2.1), (3.2.2) sul quale sia effettuato un campionamento ad intervalli di tempo T occorre introdurre l'ipotesi che l'ingresso subisca variazioni solamente negli istanti di tempo $t_0 + kT$ $(k = 0, 1, \ldots)$ nei quali viene campionato anche il valore dello stato e dell'uscita.

Le matrici A_d, B_d, C_d e D_d del modello discreto sono legate, in tale caso, alle matrici A, B, C e D del modello continuo dalle seguenti relazioni

$$A_d = e^{AT} \tag{3.3.1}$$

$$B_d = \int_0^T e^{A(T-\tau)}\, B\, \mathrm{d}\tau = \left(\int_0^T e^{A\tau}\, \mathrm{d}\tau\right) B \tag{3.3.2}$$

$$C_d = C \tag{3.3.3}$$

$$D_d = D. \tag{3.3.4}$$

La matrice dinamica A_d è, in tale caso, sempre non singolare coincidendo con la matrice di transizione del sistema continuo sull'intervallo di campionamento; la stessa proprietà vale quindi anche per la matrice di transizione $\Phi(k, 0) = A_d^k$. Nel caso in cui la matrice dinamica A del modello continuo risulti non singolare, l'espressione (3.3.2) della matrice di distribuzione degli ingressi, B_d, del modello discreto assume la forma

$$B_d = A^{-1}\big(e^{AT} - I\big)B = A^{-1}\big(A_d - I\big)B. \tag{3.3.5}$$

Esempio 3.3

Si consideri il sistema continuo dell'Esempio 3.2 ed un tempo di campionamento $T = 0.1\ s$. La matrice dinamica di un modello discreto di tale sistema è data da

$$A_d = e^{0.1\,A} \approx \begin{bmatrix} 0.9907 & 0.0903 \\ -0.1807 & 0.8100 \end{bmatrix}.$$

La matrice di distribuzione degli ingressi, B_d, è

$$B_d = A^{-1}\big(A_d - I\big)B \approx \begin{bmatrix} 0.1900 \\ -0.1994 \end{bmatrix},$$

mentre la matrice di distribuzione delle uscite C_d coincide con quella, C, del modello continuo

$$C_d = C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.4 GLI STATI DI EQUILIBRIO CON INGRESSO COSTANTE

È talvolta utile determinare il valore che lo stato e l'uscita di un sistema assumono, a regime, quando viene applicato un ingresso costante, u_c. Nel caso dei sistemi a tempo discreto (3.1.1), (3.1.2) basterà imporre che il valore dello stato al tempo $t+1$ risulti uguale al valore assunto al tempo t; ne segue la relazione

$$\big(I - A_d\big)x_e = B_d\, u_c$$

dalla quale, se la matrice $(I - A_d)$ risulta non singolare, si ricava lo stato di equilibrio

$$x_e = \big(I - A_d\big)^{-1} B_d\, u_c. \tag{3.4.1}$$

Nel caso in cui $(I - A_d)$ risulti singolare, esiste più di uno stato di equilibrio compatibile con u_c; l'insieme di tali stati è dato dalla varietà lineare definita dal vettore $(I - A_d)^+ B_d u_c$ ($(I - A_d)^+$ = pseudoinversa di $(I - A_d)$) e dallo spazio nullo della matrice $(I - A_d)$.
Nel caso dei sistemi continui (3.2.1), (3.2.2) si imporrà la nullità della derivata dello stato; ne segue, qualora la matrice dinamica A sia non singolare, il valore dello stato di equilibrio

$$x_e = -A^{-1}\, B\, u_c. \tag{3.4.2}$$

Se A risulta singolare, l'insieme degli stati di equilibrio compatibili con u_c è dato dalla varietà lineare definita dal vettore $A^+ B u_c$ (A^+ = pseudoinversa di A) e dallo spazio nullo della matrice A.

Esempio 3.4

Quale applicazione delle espressioni (3.4.1) e (3.4.2) si determineranno gli stati ai quali si portano, a regime, i sistemi considerati negli Esempi 3.1 e 3.2 in seguito alla applicazione di un gradino unitario (ingresso costante eguale ad 1). Nel caso del sistema discreto considerato nell'Esempio 3.1 si trova

$$x_e = \big(I - A_d\big)^{-1} B_d = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per il sistema continuo considerato nell'Esempio 3.2 si ha

$$x_e = -A^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Si noti come facendo riferimento al modello discreto dello stesso sistema, calcolato nell'Esempio 3.3, si ottenga, grazie alla commutatività del prodotto tra A^{-1} ed e^{AT},

$$x_e = \big(I - A_d\big)^{-1} B_d = \big(I - A_d\big)^{-1} A^{-1}\big(A_d - I\big)B = -A^{-1}B \; .$$

Risulta quindi indifferente, nel calcolo degli stati di equilibrio con ingresso costante, l'uso di modelli continui o discreti di un sistema; si noti anche come lo stato del sistema resti lo stesso passando da modelli continui a modelli discreti e viceversa.

3.5 RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ DEI SISTEMI DISCRETI

Si consideri il sistema lineare stazionario discreto (3.1.1), (3.1.2) e lo stato iniziale $x(0) = 0$. Gli stati che possono essere raggiunti per $t = 1$ sono dati da

$$x(1) = A_d\, x(0) + B_d\, u(0) = B_d\, u(0).$$

Scegliendo opportunamente l'ingresso $u(0)$, $x(1)$ può essere eguagliato a qualunque combinazione lineare delle colonne della matrice B_d; ne segue che

$$\mathcal{R}_1^+(0) = \mathrm{im}\big[B_d\big].$$

Facendo ora riferimento ad un intervallo di tempo di ampiezza 2, gli stati che possono essere raggiunti dallo stato zero sono dati da

$$x(2) = A_d^2\, x(0) + A_d B_d\, u(0) + B_d\, u(1) = A_d B_d\, u(0) + B_d\, u(1).$$

Scegliendo opportunamente gli ingressi $u(0)$ ed $u(1)$, $x(2)$ può essere eguagliato alla somma di qualunque combinazione lineare delle colonne della matrice B_d e di $A_d B_d$; ne segue che

$$\mathcal{R}_2^+(0) = \mathrm{im}\big[B_d \;\; A_d B_d\big].$$

Ripetendo il ragionamento su k transizioni si ottiene, in maniera del tutto analoga,

$$\mathcal{R}_k^+(0) = \mathrm{im}\big[B_d \;\; A_d B_d \;\; \dots A_d^{(k-1)} B_d\big] \qquad (3.5.1).$$

In generale, quindi, l'insieme degli stati raggiungibili a partire dallo stato 0 in k transizioni è un sottospazio con dimensione che cresce con k; tale sottospazio inoltre contiene tutti i precedenti. Se tuttavia, per un certo valore di k risulta $\mathcal{R}_{k+1}^+(0) = \mathcal{R}_k^+(0)$ anche tutti i successivi sottospazi coincidono con $\mathcal{R}_k^+(0)$; infatti in tale caso tutte le colonne di $A_d^k B_d$ risulteranno linearmente dipendenti dalle precedenti, apparterranno quindi a $\mathcal{R}_k^+(0)$ e lo stesso avverrà per $A_d^{(k+i)} B_d$ per qualunque $i > 0$. In ogni caso il sottospazio di dimensione massima che può essere raggiunto a partire dall'origine è dato da

$$\mathcal{R}^+(0) = \mathrm{im}\big[B_d \;\; A_d B_d \;\; \dots A_d^{(n-1)} B_d\big] \qquad (3.5.2)$$

poiché, per il teorema di Cayley–Hamilton, A_d^n può essere espressa come combinazione lineare di $A_d^0, A_d^1, \ldots, A_d^{(n-1)}$.

Si consideri ora lo stato finale $x(1) = 0$; gli stati iniziali che possono, mediante opportuna scelta dell'ingresso $u(0)$, essere controllati allo stato zero soddisfano la relazione

$$0 = A_d\, x_0 + B_d\, u(0)$$

cioè, se A_d risulta non singolare,

$$x_0 = -A_d^{-1} B_d\, u(0).$$

Ne segue che l'insieme $\mathcal{R}_1^-(0)$ è il sottospazio

$$\mathcal{R}_1^-(0) = A_d^{-1}\,\mathrm{im}\big[B_d\big] = A_d^{-1}\mathcal{R}_1^+(0).$$

Analogamente gli stati iniziali che possono essere controllati allo stato finale $x(2) = 0$ devono soddisfare, per opportuni valori di $u(0)$ e di $u(1)$, la relazione

$$0 = A_d^2\, x_0 + A_d B_d\, u(0) + B_d\, u(1).$$

Se A_d risulta invertibile si avrà quindi

$$\mathcal{R}_2^-(0) = A_d^{-2}\,\mathrm{im}\big[B_d \;\; A_d B_d\big] = A_d^{-2}\mathcal{R}_2^+(0).$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza in relazione ai sottospazi di raggiungibilità, si trova che

$$\mathcal{R}_k^-(0) = A_d^{-k}\,\mathrm{im}\big[B_d \ldots A_d^{(k-1)} B_d\big] = A_d^{-k}\mathcal{R}_k^+(0). \tag{3.5.3}$$

Nel caso in cui A_d risulti singolare sarà

$$\mathcal{R}_k^-(0) = A_d^{k+}\mathcal{R}_k^+(0) + \mathcal{N}\big(A_d^k\big) \tag{3.5.4}$$

ove A_d^{k+} e $\mathcal{N}(A_d^k)$ indicano rispettivamente la pseudoinversa e lo spazio nullo di A_d^k. Inoltre

$$\mathcal{R}^-(0) = A_d^{-n}\,\mathrm{im}\big[B_d \ldots A_d^{(n-1)} B_d\big] = A_d^{-n}\mathcal{R}^+(0) \tag{3.5.5}$$

e, nel caso in cui A_d risulti singolare,

$$\mathcal{R}^-(0) = A_d^{n+}\mathcal{R}^+(0) + \mathcal{N}\big(A_d^n\big). \tag{3.5.6}$$

Si può osservare come nei sistemi lineari stazionari e discreti i sottospazi di controllabilità su un intervallo di ampiezza k siano di dimensioni maggiori (se A_d è singolare) o uguali (se A_d è non singolare) a quelle dei corrispondenti sottospazi di raggiungibilità. Si noti inoltre come l'aumento del numero di transizioni a disposizione per raggiungere uno stato a partire dallo stato zero o per controllare uno stato allo stato zero possa risultare utile solo fino ad arrivare a n transizioni; dopo tale limite ogni ulteriore allungamento dell'intervallo non comporta vantaggi. Se è possibile raggiungere uno stato dallo stato zero (o controllare uno stato allo stato zero) ciò può essere ottenuto in non più di n transizioni.

3.6 RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ DEI SISTEMI CONTINUI

Per i sistemi continui (3.2.1), (3.2.2), a differenza di quanto avviene per i sistemi discreti, la lunghezza dell'intervallo di tempo a disposizione per il controllo (purché finito) non gioca alcun ruolo sulla possibilità di raggiungere uno stato finale a partire dallo stato zero o sulla possibilità di controllare uno stato iniziale allo stato zero. Inoltre il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{R}^+(0)$ e quello di controllabilità $\mathcal{R}^-(0)$ risultano coincidenti e dati da

$$\mathcal{R}^+(0) = \mathcal{R}^-(0) = \mathrm{im}\big[B\ AB\ \dots A^{(n-1)}B\big] \tag{3.6.1}$$

cioè dalla stessa espressione già vista per il sottospazio di raggiungibilità dei sistemi discreti. Dato un sistema continuo si ottengono, ovviamente, gli stessi sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità sia utilizzando il modello continuo (3.1.1), (3.1.2) che quello discreto (3.2.1), (3.2.2). Potrebbe tuttavia sembrare incongruente che utilizzando il modello continuo non vi siano le limitazioni poste dal modello discreto al tempo necessario per effettuare un controllo; tali limitazioni derivano dalla ipotesi di costanza dell'ingresso tra due successivi istanti di campionamento introdotta nel passaggio dal modello continuo a quello discreto.

3.7 IL CONTROLLO TRA STATI NEI SISTEMI DISCRETI E CONTINUI

Dato un modello discreto, lo stato iniziale $x(0) = 0$, l'intervallo di tempo $[0, k-1]$ ed i k valori di ingresso $u[0, k-1]$, lo stato $x(k)$ è dato da

$$x(k) = x_f = A_d^{(k-1)} B_d u(0) + \dots + A_d B_d u(k-2) + B_d u(k-1).$$

Tale relazione può essere scritta anche nella forma

$$x_f = \begin{bmatrix} A_d^{(k-1)} B_d & \dots & A_d B_d & B_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix} = P_k\, \hat{u}_k$$

ove $\hat{u}_k$ è il vettore formato dai valori dell'ingresso ai tempi $0, 1, \dots, k-1$. Assegnato uno stato x_f raggiungibile in k transizioni (esprimibile cioè come combinazione lineare delle colonne di P_k), l'insieme delle soluzioni è dato dalla varietà lineare descritta dal vettore $P_k^+ x_f$ e dal sottospazio $\mathcal{N}(P_k)$. In particolare il vettore $\hat{u}_k$ di norma Euclidea minima che consente di effettuare il controllo è dato da

$$\hat{u}_k = P_k^+ x_f. \tag{3.7.1}$$

Si noti che se x_f non è raggiungibile dallo stato zero in k transizioni, la sequenza di ingresso fornita dalla (3.7.1) è quella che consente di raggiungere lo stato $\hat{x}_f$ che minimizza la norma Euclidea dell'errore $x_f - \hat{x}_f$. Se lo stato iniziale è diverso da zero, $x(k)$ diventa

$$x(k) = x_f = A_d^k\, x_0 + A_d^{(k-1)} B_d\, u(0) + \ldots + B_d\, u(k-1);$$

ne segue che il vettore $\hat{u}_k$ di norma Euclidea minima che consente tale controllo, quando possibile, o che porta allo stato $x(k)$ più vicino a quello desiderato è dato da

$$\hat{u}_k = P_k^+ \big(x_f - A_d^k\, x_0\big); \tag{3.7.2}$$

basta cioè utilizzare la (3.7.1) sottraendo allo stato finale l'evoluzione libera dello stato iniziale. La (3.7.2) può poi essere utilizzata anche per determinare una sequenza di ingresso che controlli uno stato iniziale x_0 allo stato finale 0; basterà porre, in tal caso, $x_f = 0$.

Per i sistemi continui la funzione di ingresso che effettua, nell'intervallo $[0, t_1]$, il controllo dello stato iniziale $x_0 = 0$ allo stato finale $x(t_1) = x_f$ è data da

$$\hat{u}(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)}\, P^+\, x_f \tag{3.7.3}$$

ove P^+ indica la pseudoinversa della matrice

$$P = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)}\, \mathrm{d}\tau.$$

Se x_f non è raggiungibile dallo stato 0 si ottiene, mediante la (3.7.3), lo stato raggiungibile $\hat{x}_f$ più vicino a x_f, quello cioè che minimizza la norma Euclidea di $x_f - \hat{x}_f$. Se lo stato iniziale x_0 è diverso da zero basterà sottrarre a x_f l'evoluzione libera di x_0 in $[0, t_1]$; si userà quindi l'espressione

$$\hat{u}(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)}\, P^+ \big(x_f - e^{A t_1}\, x_0\big) \tag{3.7.4}$$

che può essere utilizzata, ponendo $x_f = 0$, anche per determinare una funzione di ingresso che effettui il controllo allo stato finale zero.

Esempio 3.5

Si consideri il sistema lineare stazionario e discreto la cui matrice dinamica, A_d, e di distribuzione degli ingressi, B_d, sono date da

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per tale sistema si vuole determinare una sequenza di ingresso che permetta di passare dallo stato 0 allo stato $x(2) = [0\ 3]^T$. La matrice P_2 è, in questo caso, quadrata e non singolare; si ottiene pertanto

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d B_d & B_d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

La sequenza cercata è quindi data da $u(0) = 3$, $u(1) = -3$; tale sequenza porta infatti lo stato iniziale a $x(1) = [3\ 0]^T$ e a $x(2) = [0\ 3]^T$ come richiesto. Si noti che, essendo P_2 quadrata e non singolare, la sua pseudoinversa coincide con l'inversa.

Si vuole poi determinare una sequenza di ingresso che porti lo stato iniziale $x(0) = [1\ 0]^T$ allo stato finale $x(2) = [0\ 1]^T$. La sequenza cercata è la stessa che porta lo stato iniziale zero allo stato finale che si ottiene sottraendo a quello assegnato l'evoluzione libera di quello iniziale sull'intervallo considerato; si calcolerà quindi, come primo passo lo stato

$$x'_f = x_f - A_d^2 x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applicando ora la (3.7.2) si ottiene

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = P_2^{-1} x'_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Il moto del sistema con la sequenza determinata porta agli stati $x(1) = [2\ 1]^T$ e $x(2) = [0\ 1]^T$. Infine si vuole determinare il valore dell'ingresso che porta lo stato $x(0) = [1\ 1]^T$ allo stato finale zero al tempo 1. Utilizzando di nuovo la (3.7.2) con $x_f = 0$ e $k = 1$ si ottiene

$$u(0) = -P_1^+ A_d x_0 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2$$

Si noti come, in questo caso, la pseudoinversa della matrice P_1 coincida con la trasposta.

3.8 ASPETTI GEOMETRICI DELLA RAGGIUNGIBILITÀ E RELATIVA SCOMPOSIZIONE

Si consideri il sottospazio di raggiungibilità di un sistema lineare stazionario discreto o continuo

$$\mathcal{R}^+(0) = \mathrm{im}\big[B \; AB \; \dots A^{(n-1)}B\big].$$

Si è già osservato come, in base al teorema di Cayley–Hamilton, tutti i termini del tipo $A^k B$ con $k \geq n$ risultino linearmente dipendenti dai precedenti; ciò stabilisce *l'invarianza* di $\mathcal{R}^+(0)$ rispetto alla trasformazione descritta dalla matrice A. Di conseguenza, per qualunque vettore $x \in \mathcal{R}^+(0)$ risulta

$$A\,x \in \mathcal{R}^+(0)$$

e qualunque stato iniziale appartenente a $\mathcal{R}^+(0)$ genera un moto libero che si evolve completamente all'interno di $\mathcal{R}^+(0)$. Si può inoltre osservare come $\mathcal{R}^+(0)$ contenga il sottospazio im B; $\mathcal{R}^+(0)$ è infatti il più piccolo sottospazio invariante rispetto ad A contenente im B come si può verificare osservando che risulta contenuto in ogni altro sottospazio invariante rispetto ad A contenente im B.

L'invarianza di $\mathcal{R}^+(0)$ rispetto ad A potrebbe essere dedotta anche osservando che, in caso contrario, una volta raggiunto dall'origine uno stato di $\mathcal{R}^+(0)$ basterebbe applicare un ingresso nullo per raggiungere anche stati non appartenenti a $\mathcal{R}^+(0)$ attraverso il moto libero; tale risultato sarebbe assurdo poiché tutti gli stati raggiungibili dall'origine appartengono a $\mathcal{R}^+(0)$. L'invarianza di $\mathcal{R}^+(0)$ rispetto ad A consente di scomporre qualunque sistema in due sottosistemi interconnessi che ne descrivono rispettivamente la parte raggiungibile e quella non raggiungibile. Si consideri, a tale scopo, un cambiamento di base nello spazio degli stati che porti alla nuova base descritta, rispetto alla vecchia, dalle colonne della matrice (quadrata e non singolare) T; tale cambiamento di base determina il passaggio dallo stato x allo stato z legato ad x dalla relazione

$$x = T\,z.$$

Sostituendo tale espressione di x nelle equazioni (3.1.1)–(3.1.2) o (3.2.1)–(3.2.2) si trova la rappresentazione del sistema rispetto alla nuova base data (facendo riferimento ad un sistema continuo) dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A'\,z(t) + B'\,u(t), \\ y(t) &= C'\,z(t) + D'\,u(t) \end{aligned}$$

ove

$$A' = T^{-1}A\,T, \qquad B' = T^{-1}B, \qquad C' = C\,T, \qquad D' = D.$$

Per scomporre un sistema nella sua parte raggiungibile ed in quella non raggiungibile si sceglierà una base, T, del tipo

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$$

essendo T_1 $(n \times n_1)$ una base di $\mathcal{R}^+(0)$ e T_2 $(n \times n_2)$ un insieme di vettori che completano la base dello spazio degli stati $\mathcal{X} = R^n$. In tale base, grazie all'invarianza di $\mathcal{R}^+(0)$ rispetto ad A ed al fatto che im $B \subseteq \mathcal{R}^+(0)$, le matrici A', B', C' e D' presentano la seguente struttura

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C' &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

essendo le partizioni di A', B' e C' congruenti con le dimensioni di T_1 e T_2. Indicando con z_1 le prime n_1 componenti di z e con z_2 le ultime $n - n_1$ componenti, il modello del sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A_{11}\, z_1(t) + A_{12}\, z_2(t) + B_1\, u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= A_{22}\, z_2(t) \\ y(t) &= C_1\, z_1(t) + C_2\, z_2(t). \end{aligned}$$

Il sistema può quindi essere considerato come formato da due sottosistemi interconnessi, S_1 ed S_2, che rappresentano la parte raggiungibile e quella non raggiungibile (Figura 3.6).

Figura 3.6 – Scomposizione relativa alla raggiungibilità

Se si volesse estrarre da un sistema la sola parte raggiungibile questa sarebbe descritta dal modello

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A_{11}\, z_1(t) + B_1\, u(t) \\ y(t) &= C_1\, z_1(t). \end{aligned}$$

Si noti come, a causa della struttura di A' e di B', la risposta impulsiva dell'intero sistema coincida, sia nel caso discreto che in quello continuo, con quella della sua parte raggiungibile. Risulta cioè

$$W(k) = C_d\, A_d^{(k-1)}\, B_d = C_{d1}\, A_{d_{11}}^{(k-1)}\, B_{d1} \tag{3.8.2}$$

e

$$W(t) = C\, e^{At}\, B = C_1\, e^{A_{11}t}\, B_1. \tag{3.8.3}$$

Esempio 3.6

Si consideri il sistema puramente dinamico discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_d\, x(t) + B_d\, u(t) \\ y(t) &= C_d\, x(t) \end{aligned}$$

ove

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si vuole scomporre tale sistema nella sua parte raggiungibile e in quella non raggiungibile. Il primo passo per effettuare la scomposizione consiste nel calcolo di una matrice di base per il sottospazio $\mathcal{R}^+(0)$ che è lo spazio generato dalle colonne della matrice di raggiungibilità $P = [\, B_d\ A_d B_d\ \dots\ A_d^{(n-1)} B_d\,]$. Selezionando le colonne linearmente indipendenti di P, ad esempio mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt, si ottiene la base cercata data da

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet \end{matrix} \quad \cdots \quad \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Si costruirà quindi una nuova base per lo spazio degli stati $\mathcal{X} = \mathcal{R}^6$ del tipo $T = \big[T_1\ T_2\big]$ ove T_1 è una base di $\mathcal{R}^+(0)$ e T_2 completa la base di $\mathcal{X}$. Nel caso in esame, essendo

T_1 formata da colonne dell'identità, la scelta più semplice è

$$T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Essendo, in questo caso, la matrice T ortonormale, l'inversa coincide con la trasposta e si ottiene facilmente il modello del sistema nella nuova base che sarà del tipo

$$A'_d = T^{-1} A_d\, T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad B'_d = T^{-1} B_d = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C'_d = C_d\, T = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

ove le dimensioni delle varie sottomatrici sono determinate dal numero di colonne delle sottomatrici T_1 e T_2. Si ottiene

$$A'_d = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad B'_d = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$C'_d = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La parte raggiungibile del sistema è quindi descritta dalle matrici

$$A''_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B''_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C''_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A verifica dei calcoli eseguiti si determinerà ora la risposta impulsiva del sistema originale e della sua parte raggiungibile al tempo $t = 3$. Si ottiene

$$W(3) = C_d\, A_d^2\, B_d = C''_d\, A''^2_d\, B''_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.9 Osservabilità e ricostruibilità dei sistemi discreti

Si consideri il sistema lineare stazionario e discreto descritto dalle (3.1.1), (3.1.2). Gli stati $x(0) = x_0$ che generano uscita nulla al tempo 0, $y(0) = 0$, con ingresso nullo, $u(0) = 0$, devono soddisfare la condizione

$$0 = C_d\, x_0 + D_d\, u(0) = C_d\, x_0 \; .$$

Tali stati soddisfano quindi la condizione

$$x_0 \in \mathcal{N}\big(C_d\big) \; ;$$

ne segue che l'insieme degli stati iniziali che con ingresso nullo danno uscita nulla è il sottospazio

$$\mathcal{E}_0^-\big([0],[0]\big) = \mathcal{N}\big(C_d\big) \; .$$

Si consideri ora un intervallo di ampiezza 1 e la sequenza di ingresso $u[0,1] = [0,\ 0]$. Gli stati x_0 che danno risposta nulla in tale intervallo, $y[0,1] = [0,0]$ devono soddisfare, oltre la condizione precedente, anche la condizione

$$0 = C_d A_d\, x_0 + D_d\, u(1) = C_d A_d\, x_0 \; ;$$

devono quindi soddisfare la condizione

$$x_0 \in \mathcal{N} \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \end{bmatrix} \; .$$

Ne segue che

$$\mathcal{E}_1^-\big([0,0],[0,0]\big) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \end{bmatrix} \; .$$

Considerando, più in generale, un intervallo di ampiezza k ed utilizzando la notazione semplificata $\mathcal{E}_k^-(0,0)$ per indicare $\mathcal{E}_k^-([0\dots0],[0\dots0])$, si trova che

$$\mathcal{E}_k^-(0,0) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^k \end{bmatrix} \; . \tag{3.9.1}$$

Il generico sottospazio $\mathcal{E}_k^-(0,0)$ è quindi *contenuto* in tutti i precedenti e tale sequenza ha come limite

$$\mathcal{E}^-(0,0) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{3.9.2}$$

poiché, per il teorema di Cayley–Hamilton, A_d^n è combinazione lineare delle potenze inferiori di A_d e lo stesso vale per le potenze successive. Il sottospazio $\mathcal{E}_k^-(0,0)$ contiene stati che per $t = [0,k]$ danno, con ingresso nullo, uscita nulla; per la linearità del sistema tali stati sono indistinguibili e *non osservabili* in tale intervallo. Analogamente $\mathcal{E}^-(0,0)$ è il sottospazio che contiene tutti gli stati, tra loro equivalenti ed equivalenti allo stato zero, che danno uscita nulla, con ingresso nullo, in qualunque intervallo; si tratta quindi degli stati *non osservabili*.

Analogamente, gli stati finali, $x(1)$, compatibili con ingresso ed uscita nulle per $t = [0,1]$ sono i trasformati secondo A_d degli stati iniziali compatibili con ingresso ed uscita nulle nello stesso intervallo; vale quindi la relazione

$$\mathcal{E}_1^+(0,0) = A_d\, \mathcal{E}_1^-(0,0)$$

e, ripetendo il ragionamento su un intervallo di ampiezza qualsiasi, si trova che

$$\mathcal{E}_k^+(0,0) = A_d^k\, \mathcal{E}_k^-(0,0) \tag{3.9.3}$$

e

$$\mathcal{E}^+(0,0) = A_d^{(n-1)}\, \mathcal{E}^-(0,0)\,. \tag{3.9.4}$$

$\mathcal{E}_k^+(0,0)$ e $\mathcal{E}^+(0,0)$ sono i sottospazi degli stati non ricostruibili in $[0,k]$ e di quelli non ricostruibili su qualunque intervallo.

3.10 Osservabilità e ricostruibilità dei sistemi continui

Per i sistemi continui (3.2.1), (3.2.2), a differenza di quanto avviene per i sistemi discreti, la lunghezza dell'intervallo di tempo a disposizione non influisce sulla dimensione dei sottospazi di non osservabilità, $\mathcal{E}_t^-(0,0)$, e di non ricostruibilità, $\mathcal{E}_t^+(0,0)$, quindi non influisce neppure sulla possibilità di osservare lo stato iniziale o di ricostruire lo stato finale. I sottospazi di non osservabilità e di non ricostruibilità risultano inoltre coincidenti e dati da

$$\mathcal{E}^-(0,0) = \mathcal{E}^+(0,0) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{3.10.1}$$

cioè dalla stessa espressione già vista per il sottospazio di non osservabilità dei sistemi discreti. Valgono, per l'osservabilità, le stesse considerazioni già fatte per la raggiungibilità: nel caso dei sistemi continui si ottengono cioè gli stessi sottospazi sia utilizzando il modello continuo (3.1.1), (3.1.2), sia quello discreto relativo allo stesso sistema (3.2.1), (3.2.2).

3.11 L'osservazione e la ricostruzione dello stato nei sistemi discreti e continui

Dato un modello discreto (3.1.1), (3.1.2), un intervallo di tempo di ampiezza k e lo stato iniziale $x(0) = x_0$, la risposta libera del sistema agli istanti di tempo $t = 0, 1, \dots, k$ è data da

$$\begin{aligned} y_0(0) &= C_d\, x_0 \\ y_0(1) &= C_d A_d\, x_0 \\ &\dots \\ y_0(k) &= C_d A_d^k x_0 \,. \end{aligned}$$

Tali relazioni possono essere scritte anche nella forma

$$\begin{bmatrix} y_0(0) \\ y_0(1) \\ \vdots \\ y_0(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^k \end{bmatrix} x_0$$

o anche, in maniera più sintetica,

$$y_{0_k} = Q_k\, x_0$$

ove y_{0_k} è un vettore formato dai valori assunti dall'uscita ai tempi $0, 1, \dots, k$. L'insieme degli stati iniziali compatibili con la risposta libera considerata è dato dalla varietà lineare descritta dal vettore $Q_k^+ y_{0_k}$ e dal sottospazio $\mathcal{E}_k^-(0,0)$. In particolare il vettore di norma Euclidea minima compatibile con y_{0_k} è dato da

$$\hat{x}_0 = Q_k^+\, y_{0_k} \,. \tag{3.11.1}$$

Si noti che se $x_0 \in \mathcal{E}_k^-(0,0)^\perp$ e risulta quindi osservabile, la (3.11.1) fornisce $\hat{x}_0 = x_0$. Nel caso invece in cui $x_0 \notin \mathcal{E}_k^-(0,0)^\perp$ la (3.11.1) fornisce lo stato $\hat{x}_0$ osservabile che minimizza la norma Euclidea dell'errore $\hat{x}_0 - x_0$. Se l'ingresso del sistema non è nullo in $[0, k]$ basterà sottrarre alla risposta osservata la risposta forzata per ottenere la risposta libera

$$y_0(j) = y(j) - \sum_{i=0}^{j-1} C_d\, A_d^{(j-i-1)}\, B_d\, u(j) - D_d\, u(j), \qquad j = 1, \dots, k \tag{3.11.2}$$

da utilizzare nella (3.11.1). Lo stato finale $\hat{x}(k)$ corrispondente a $\hat{x}_0$ sarà poi dato da $A_d^k x_0$ nel caso di moto libero o dalla espressione generale (3.1.3) del moto se l'ingresso è diverso da zero in $[0, k]$. Per i sistemi continui la stima dello stato iniziale in funzione del moto libero $y_0(t)$ nell'intervallo $[0, t_1]$ è data da

$$x_0 = Q^+ \int_0^{t_1} e^{A^T\tau} C^T y_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{3.11.3}$$

ove Q^+ indica la pseudoinversa della matrice

$$Q = \int_0^{t_1} e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau}\, \mathrm{d}\tau \ .$$

Se $x_0 \in \mathcal{E}_{t_1}^-(0,0)^\perp$ e risulta quindi osservabile, la (3.11.3) fornisce $\hat{x}_0 = x_0$. Nel caso invece in cui $x_0 \notin \mathcal{E}_{t_1}^-(0,0)^\perp$, la (3.11.3) fornisce lo stato $\hat{x}_0$ osservabile che minimizza la norma Euclidea dell'errore $\hat{x}_0 - x_0$.
Se l'ingresso del sistema non è nullo in $[0, t_1]$ basterà sottrarre alla risposta osservata la risposta forzata per ottenere la risposta libera

$$y_0(t) = y(t) - C \int_0^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau - D\, u(t) \tag{3.11.4}$$

da utilizzare nella (3.11.3).

Esempio 3.7

Si consideri il sistema lineare stazionario e discreto descritto dalle matrici

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_d = [\ 1 \quad 0\ ] \ .$$

Per tale sistema si vuole determinare lo stato iniziale e quello finale relativi alla risposta libera $y_0[0,1] = [1, 2]$. La matrice Q_2 è, in questo caso, quadrata e non singolare e la sua inversa coincide quindi con la pseudoinversa; ne segue che

$$\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0(0) \\ y_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Si noti come risulti, nel caso in esame, $\mathcal{E}_1^-(0,0) = \mathcal{E}^-(0,0) = \{0\}$; lo stato iniziale è quindi osservabile e $\hat{x}_0 = x_0$. Lo stato finale $x(1)$ è poi dato da

$$x(1) = A_d\, x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Si vuole poi determinare lo stato iniziale corrispondente alle sequenze di ingresso $u[0, 1] = [1, 0]$ e di uscita $y[0, 1] = [0, 2]$. Occorre in tale caso calcolare, come primo passo, la risposta libera sottraendo la risposta forzata a quella totale:

$$\begin{aligned} y_0(0) &= y(0) = 0 \\ y_0(1) &= y(1) - C_d B_d\, u(0) = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Segue poi

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0(0) \\ y_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lo stato finale $x(1)$ è poi dato da

$$\begin{aligned} x(1) =& A_d\, x_0 + B_d\, u(0) \\ =& \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.12 Aspetti geometrici della osservabilità e relativa scomposizione

Si consideri il sottospazio di non osservabilità di un sistema lineare stazionario discreto o continuo

$$\mathcal{E}^-(0, 0) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Per il teorema di Cayley–Hamilton tale sottospazio risulta invariante rispetto alla trasformazione descritta dalla matrice A, quindi per ogni $x \in \mathcal{E}^-(0, 0)$ risulta

$$A\,x \in \mathcal{E}^-(0, 0)$$

e qualunque moto libero che tragga origine all'interno di $\mathcal{E}^-(0, 0)$ si evolve all'interno di tale sottospazio. Si può inoltre notare come $\mathcal{E}^-(0, 0)$ risulti contenuto nel sottospazio $\mathcal{N}(C)$ e si potrebbe anche dimostrare che $\mathcal{E}^-(0, 0)$ è il più grande sottospazio invariante rispetto ad A contenuto in $\mathcal{N}(C)$ osservando che ogni altro sottospazio che goda di tali caratteristiche risulta contenuto in $\mathcal{E}^-(0, 0)$.

L'invarianza di $\mathcal{E}^-(0, 0)$ rispetto ad A potrebbe essere dedotta anche osservando che, in caso contrario, un moto libero che tragga origine da uno stato $x_0 \in \mathcal{E}^-(0, 0)$

potrebbe evolversi al di fuori di tale sottospazio e dare quindi origine ad una risposta libera non identicamente nulla.

L'invarianza di $\mathcal{E}^{-}(0,0)$ rispetto ad A consente di scomporre qualunque sistema in due sottosistemi interconnessi che ne descrivono rispettivamente la parte osservabile e quella non osservabile. Si consideri, a tale scopo, una nuova base, T, dello spazio degli stati del tipo

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$$

ove T_1 $(n \times n_1)$ è una base di $\mathcal{E}^{-}(0,0)$ e T_2 $(n \times n_2)$ un insieme di vettori che completano la base dello spazio degli stati $\mathcal{X} = R^n$. Grazie all'invarianza di $\mathcal{E}^{-}(0,0)$ rispetto ad A ed al fatto che $\mathcal{E}^{-}(0,0) \subseteq \mathcal{N}(C)$, le matrici $A' = T^{-1}AT$, $B' = T^{-1}B$ e $C' = CT$ che descrivono il sistema nella nuova base presentano la seguente struttura

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ C' &= \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.12.1}$$

essendo le partizioni di A', B' e C' congruenti con le dimensioni di T_1 e T_2. Indicando con z_1 le prime n_1 componenti dello stato, z, del sistema nella nuova base e con z_2 le ultime $n - n_1$ componenti, il modello del sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A_{11}\, z_1(t) + A_{12}\, z_2(t) + B_1\, u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= A_{22}\, z_2(t) + B_2\, u(t) \\ y(t) &= C_2\, z_2(t)\ . \end{aligned}$$

Il sistema può quindi essere considerato come formato da due sottosistemi interconnessi, S_1 ed S_2, che rappresentano rispettivamente la parte non osservabile e quella osservabile (Figura 3.7).

Figura 3.7 – Scomposizione relativa alla osservabilità

Se si volesse estrarre da un sistema la sola parte osservabile, cioè ottenere la forma minima, questa sarebbe descritta dal modello

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) &= A_{22}\, z_2(t) + B_2\, u(t) \\ y(t) &= C_2\, z_2(t)\ . \end{aligned}$$

Si noti come, a causa della struttura di A' e di C', la risposta impulsiva dell'intero sistema coincida, sia nel caso discreto che in quello continuo, con quella della sua parte osservabile. Risulta cioè

$$W(k) = C_d\, A_d^{(k-1)}\, B_d = C_{d2}\, A_{d22}^{(k-1)}\, B_{d2} \tag{3.12.2}$$

e

$$W(t) = C\, e^{At}\, B = C_2\, e^{A_{22}t}\, B_2\,. \tag{3.12.3}$$

Esempio 3.8

Si consideri la riduzione alla forma minima del sistema visto nell'Esempio 3.6. Si determinerà dapprima il sottospazio $\mathcal{E}^-(0,0)$, complemento ortogonale dello spazio generato dalle colonne di $Q^T = [\,C_d^T\;\; A_d^T C_d^T\; \ldots\; A_d^{T(n-1)} C_d^T\,]$. Si costruirà quindi la matrice $[\,Q^T\;\; I\,]$ alle cui colonne verrà applicato il procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt; i vettori ottenuti dalle colonne di I forniranno la base cercata. Si ottiene

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

e la base di $\mathcal{E}^-(0,0)$ risulta formata dai seguenti vettori

$$\begin{array}{cc}
1 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 1 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0
\end{array}\,.$$

Si costruirà quindi una nuova base per lo spazio degli stati $\mathcal{X} = \mathcal{R}^6$ del tipo $T = \left[T_1\; T_2\right]$ ove T_1 è una base di $\mathcal{E}^-(0,0)$ e T_2 completa la base di $\mathcal{X}$. Nel caso in esame, essendo T_1 formata da colonne dell'identità, la scelta più semplice è

$$T = \left[\begin{array}{cc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right].$$

Essendo, in questo caso, la matrice T ortonormale, l'inversa coincide con la trasposta e si ottiene facilmente il modello del sistema nella nuova base che, essendo $\mathcal{E}^-(0,0)$ invariante rispetto ad A_d e contenuto nel sottospazio $\mathcal{N}(C_d)$, avrà una struttura del tipo

$$A'_d = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad B'_d = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$
$$C'_d = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

ove le dimensioni delle sottomatrici di A'_d, B'_d e C'_d sono determinate dal numero di colonne delle sottomatrici T_1 e T_2. Si ottiene

$$A'_d = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad B'_d = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$C'_d = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La parte osservabile del sistema (forma minima) è quindi descritta dalle matrici

$$A''_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B''_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C''_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A verifica dei calcoli eseguiti si determinerà ora la risposta impulsiva del sistema originale e della sua parte osservabile al tempo $t = 3$. Si ottiene

$$W(3) = C_d\, A_d^2\, B_d = C''_d\, A''^2_d\, B''_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.13 La scomposizione canonica di Kalman

La *scomposizione canonica di Kalman* si ottiene rappresentando un modello nello spazio degli stati rispetto ad una base dello spazio degli stati partizionata in base alle caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità del sistema considerato e mette in evidenza tali proprietà.

Si opera la trasformazione di coordinate $x = T\,z$, $z = T^{-1}\,x$, in cui è $T = [T_1\;T_2\;T_3\;T_4]$ nonsingolare, con $\mathrm{im}T_1 = \mathcal{R}^+(0) \cap \mathcal{E}^-(0,0)$, $\mathrm{im}[T_1\;T_2] = \mathcal{R}^+(0)$, $\mathrm{im}[T_1\;T_3] = \mathcal{E}^-(0,0)$. Nella nuova base il sistema è descritto, facendo riferimento al caso continuo, dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A'\,z(t) + B'\,u(t) \\ y(t) &= C'\,z(t) + D\,u(t), \end{aligned} \tag{3.13.1}$$

in cui $z \in \mathcal{R}^n$ e le matrici A', B', C' presentano le strutture

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{14} \\ O & A'_{22} & O & A'_{24} \\ O & O & A'_{33} & A'_{34} \\ O & O & O & A'_{44} \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ O \\ O \end{bmatrix},$$
$$C' = \begin{bmatrix} O & C'_2 & O & C'_4 \end{bmatrix}. \tag{3.13.2}$$

La struttura di A' è conseguenza del fatto che $\mathcal{R}^+(0)$ ed $\mathcal{E}^-(0,0)$ sono invarianti in A, quella di B' del fatto che è $\mathrm{im}B \subseteq \mathcal{R}^+(0)$ e quella di C' del fatto che è $\mathcal{E}^-(0,0) \subseteq \mathcal{N}(C)$. Le dimensioni delle sottomatrici di A', B' e C' sono congruenti con il numero di colonne di T_1, T_2, T_3 e T_4. Considerando una analoga partizione del vettore di stato $z = [z_1\;z_2\;z_3\;z_4]^T$, il modello del sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A'_{11}\,z_1 + A'_{12}\,z_2 + A'_{13}\,z_3 + A'_{14}\,z_4 + B'_1\,u \\ \dot{z}_2 &= A'_{22}\,z_2 + A'_{24}\,z_4 + B'_2\,u \\ \dot{z}_3 &= A'_{33}\,z_3 + A'_{34}\,z_4 \\ \dot{z}_4 &= A'_{44}\,z_4 \\ y &= C'_2\,z_2 + C'_4\,z_4 + D\,u \end{aligned} \tag{3.13.3}$$

La particolare struttura delle matrici A', B', C' consente di scomporre il sistema dato (ridefinendone lo stato) in quattro sottosistemi dinamici interconnessi come in figura. Gli stati dei sottosistemi 1 e 2 sono raggiungibili, mentre gli stati dei sottosistemi 1 e 3 sono inosservabili dall'uscita y. I sottosistemi 2 e 4 (oltre al legame algebrico D) costituiscono nel loro complesso una forma minima del sistema dato.

Il solo sistema 2 è completamente raggiungibile ed osservabile ed è il solo che, assieme al legame algebrico D, determina il legame ingresso–uscita, cioè la risposta del sistema complessivo con stato iniziale zero.

Figura 3.8 – Scomposizione canonica di Kalman di un sistema dinamico

La risposta impulsiva del sistema complessivo coincide quindi con quella della sola parte raggiungibile ed osservabile:

$$W(t) = C\, e^{At}\, B = C'\, e^{A't}\, B' = C_2\, e^{A_{22}t}\, B_2\,. \tag{3.13.4a}$$

Le stesse considerazioni possono essere ripetute per il caso discreto; oltre all'intera scomposizione, che viene effettuata nello stesso modo sui sistemi discreti, vale la relazione

$$W(k) = C_d\, A_d^{(k-1)}\, B_d = C'_d\, A'^{(k-1)}_d\, B'_d = C_{d2}\, A_{d22}^{(k-1)}\, B_{d2}\,. \tag{3.13.4b}$$

Esempio 3.9

Si consideri lo stesso sistema lineare stazionario e discreto già visto negli Esempi 3.6 e 3.7 e si effettui, su tale sistema, la scomposizione canonica di Kalman. Nell'Esempio 3.6 si è già determinata una base del sottospazio $\mathcal{R}^+(0)$ mentre nell'Esempio 3.8 si è determinata una base di $\mathcal{E}^-(0,0)$. Nel caso specifico, essendo le basi di $\mathcal{R}^+(0)$ e di $\mathcal{E}^-(0,0)$ formate da colonne della matrice identità, è possibile determinare una base della loro intersezione semplicemente selezionando le colonne di I comuni alle due basi. Analogamente T_2 sarà formata dalle residue colonne della base di $\mathcal{R}^+(0)$ e T_3 dalle residue colonne della base di $\mathcal{E}^-(0,0)$. Infine T_4 sarà formata dalle colonne di I non presenti in T_1, T_2 e T_3. Si ottiene quindi la nuova base

$$T = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Essendo la matrice T ortonormale, l'inversa coincide con la trasposta e si ottiene facilmente la terna di matrici che descrive il modello del sistema nella nuova base che avrà una struttura del tipo

$$A'_d = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{14} \\ O & A'_{22} & O & A'_{24} \\ O & O & A'_{33} & A'_{34} \\ O & O & O & A'_{44} \end{bmatrix}, \quad B'_d = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ O \\ O \end{bmatrix},$$

$$C'_d = \begin{bmatrix} O & C'_2 & O & C'_4 \end{bmatrix}$$

ove le dimensioni delle varie sottomatrici sono determinate dal numero di colonne delle sottomatrici T_1, T_2, T_3 e T_4. Si ottiene

$$A'_d = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad B'_d = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$C'_d = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Calcolando, infine, la risposta impulsiva della sola parte raggiungibile ed osservabile del sistema al tempo $t = 3$, si trova

$$W(3) = C_d\, A_d^2\, B_d = C'_2\, A'^2_{22}\, B'_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.14 Stabilità dei sistemi lineari discreti e continui

La linearità di un sistema dinamico ha importanti conseguenze sulla stabilità. Si consideri infatti lo scarto (2.1.2) tra il moto di riferimento ed il moto in cui lo stato iniziale è stato perturbato di δx_0; per la linearità della φ rispetto allo stato iniziale e all'ingresso risulta

$$\delta x_1(t) = \varphi(t, t_0, \delta x_0, 0). \tag{3.14.1}$$

La perturbazione del moto non dipende cioè né dal moto considerato né dall'ingresso applicato ma solo dalla perturbazione dello stato iniziale; ne segue che la stabilità (semplice o asintotica) di un moto o di uno stato di equilibrio implica la stabilità (semplice o asintotica) di qualunque altro moto o stato di equilibrio. Analogamente la perturbazione del moto (2.1.3) dovuta ad una perturbazione della funzione di ingresso, è data da

$$\delta x_2(t) = \varphi(t, t_0, 0, \delta u[t_0, t]) \tag{3.14.2}$$

e dipende solo dalla perturbazione $\delta u[t_0, t]$ e non dallo stato iniziale o dall'ingresso applicato. Per quanto detto in precedenza è possibile, per i sistemi lineari, definire stabile (asintoticamente stabile) un sistema quando gode di tale proprietà un suo qualunque moto o stato di equilibrio. Si noti come per i sistemi lineari non abbia più senso la distinzione tra stabilità in piccolo e stabilità in grande; se infatti si moltiplica per k la perturbazione dello stato iniziale o dell'ingresso si osserverà, per la linearità della φ, una perturbazione del moto pure moltiplicata per k.

Per determinare le condizioni di stabilità dei sistemi lineari conviene fare riferimento allo stato zero che risulta sempre di equilibrio con ingresso nullo. Facendo riferimento allo stato zero e ad un sistema discreto risulta, per una perturbazione δx_0 dello stato iniziale, cioè per stato iniziale δx_0, al tempo $t = k$

$$\delta x_1(t) = A_d^k \, \delta x_0$$

$$\|\delta x_1(t)\| \leq \|A_d^k\| \, \|\delta x_0\| \, .$$

La condizione $\|\delta x_1(t)\| < \epsilon$ per $\|\delta x_0\| < \eta$ richiesta dalla stabilità semplice può essere soddisfatta se e solo se la norma di A_d^k risulta, per ogni k, limitata. Se infatti $\|A_d^k\| \leq M$ basterà assumere, fissato ϵ, $\eta = \epsilon / M$. Si può poi dimostrare che la condizione

$$\|A_d^k\| \leq M < \infty$$

è soddisfatta se e solo se tutti gli autovalori di A_d hanno modulo minore o uguale ad 1 e quelli di modulo unitario sono zeri semplici del polinomio minimo di A_d. Per la stabilità asintotica occorre sia soddisfatta anche la condizione

$$\lim_{k \to \infty} \|A_d^k\| = 0$$

e ciò avviene se e solo se tutti gli autovalori di A_d hanno modulo minore di 1. Utilizzando l'espressione (3.1.3) del moto e facendo riferimento alla struttura (3.8.1) delle matrici A_d e B_d nella scomposizione del sistema nelle sue parti raggiungibile e non raggiungibile si può poi verificare come un sistema risulti stabile ingresso–limitato stato–limitato (i.l.s.l.) se e solo se tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema hanno modulo minore di uno, se cioè tale parte risulta asintoticamente stabile.

Considerando infine l'espressione (3.1.4) della risposta e facendo riferimento alla struttura (3.13.2) delle matrici A_d, B_d e C_d nella scomposizione canonica di Kalman del sistema si può verificare come un sistema risulti stabile ingresso–limitato uscita–limitata (i.l.u.l.) se e solo se tutti gli autovalori della parte raggiungibile ed osservabile del sistema hanno modulo minore di uno, cioè se tale parte risulta asintoticamente stabile.

L'estensione di tali risultati al caso continuo può essere fatta ricordando che, per uno stesso sistema continuo, il legame tra la matrice dinamica, A, del modello continuo e quella, A_d, del modello discreto, è data da

$$A_d = e^{AT}$$

essendo T l'intervallo di campionamento. Essendo quindi $A = (\ln A_d)/T$, la condizione "modulo degli autovalori minore od uguale ad uno" su A_d diventa "parte reale degli autovalori minore o uguale a zero" su A.

Ne segue che un sistema lineare stazionario e continuo è semplicemente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice dinamica A hanno parte reale minore o uguale a zero e quelli a parte reale nulla sono zeri semplici del polinomio minimo di A. La stabilità asintotica richiede che la parte reale di tutti gli autovalori di A sia minore di zero. Infine la stabilità i.l.s.l. richiede che siano a parte reale minore di zero tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema mentre la stabilità i.l.u.l. richiede siano a parte reale minore di zero gli autovalori della parte raggiungibile ed osservabile del sistema.

Esempio 3.10

Si consideri il sistema discreto già studiato negli Esempi 3.6, 3.7 e 3.9. Si vuole, per tale sistema, valutare la stabilità semplice o asintotica, i.l.s.l. e i.l.u.l. Si calcoleranno quindi gli autovalori della matrice dinamica, A_d; si ottiene

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= -1 \\
\lambda_3 &= -1 \\
\lambda_4 &= 1 \\
\lambda_5 &= -2 \\
\lambda_6 &= -2\ .
\end{aligned}$$

Essendo presenti autovalori di modulo maggiore di uno, il sistema non risulta stabile né semplicemente né asintoticamente. Nell'Esempio 3.6 si è calcolata la matrice dinamica, A''_d, della parte raggiungibile del sistema; gli autovalori di tale matrice sono

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= -1 \\
\lambda_3 &= -1\ .
\end{aligned}$$

Essendo presenti autovalori di modulo unitario, tale parte non è asintoticamente stabile ed il sistema non risulta stabile i.l.s.l. Facendo infine riferimento alla scomposizione canonica di Kalman effettuata nell'Esempio 3.9, si trova che gli autovalori della parte raggiungibile ed osservabile sono

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -1 \; ;$$

il sistema non è quindi stabile neppure i.l.u.l.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

G. Marro, *Teoria dei Sistemi e del Controllo*, Zanichelli Editore, Bologna, 1989.

R. Guidorzi, *Teoria dei Sistemi: Esercizi e Applicazioni*, Zanichelli Editore, Bologna, 1991.