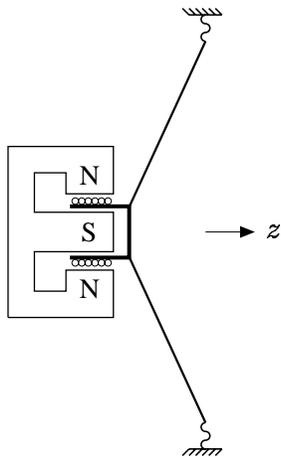


Un altoparlante magnetico ha un cono di massa m mantenuto in posizione da una sospensione elastica di costante k . Il cono, nel suo spostamento, è soggetto ad un attrito viscoso, dovuto all'accoppiamento acustico con l'ambiente, caratterizzato dal coefficiente f . La bobina mobile ha resistenza R ed induttanza L ; il coefficiente di accoppiamento elettroacustico dovuto al campo magnetico presente al traferro è β .



$$R = 4 \Omega$$

$$L = 0.1 \text{ mH}$$

$$k = 1000 \text{ N/m}$$

$$f = 20 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$m = 10 \text{ g}$$

$$\beta = 10 \text{ N/A}$$

Fig. 11.1

Per tale sistema

- 1) Si determini un modello nello spazio degli stati assumendo come ingresso la tensione applicata e come uscita la corrente nella bobina mobile e la velocità del cono;
- 2) Si determini l'andamento del modulo e dell'argomento dell'impedenza dell'altoparlante in funzione della frequenza;
- 3) Si determini la potenza elettrica assorbita, in regime sinusoidale, in funzione della frequenza;
- 4) Si determini la potenza acustica ceduta all'ambiente, in regime sinusoidale, al variare della frequenza.

SOLUZIONE

1) Il sistema è composto da una parte elettrica e da una meccanica tra loro interagenti. Indicando con $i(t)$ la corrente che attraversa la bobina mobile, con $u(t)$ la tensione applicata ai suoi capi e con $z(t)$ il suo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio, si può scrivere, per la parte elettrica, una prima equazione

data da

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \beta \frac{dz}{dt} = u .$$

L'equilibrio delle forze agenti sul cono porta poi ad una seconda equazione data da

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + f \frac{dz}{dt} + kz = \beta i .$$

Le due equazioni differenziali precedenti descrivono completamente la dinamica del sistema. La scelta più opportuna per le variabili di stato del sistema in esame è costituita dalla corrente nella bobina mobile e da posizione e velocità del cono. Si sceglierà pertanto $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = z(t)$ e $x_3(t) = \dot{z}(t)$. Con tale scelta le equazioni precedenti possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{R}{L} x_1 - \frac{\beta}{L} x_3 + \frac{1}{L} u \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{\beta}{m} x_1 - \frac{k}{m} x_2 - \frac{f}{m} x_3 . \end{aligned}$$

Le matrici A , B e C che descrivono il modello cercato sono quindi le seguenti

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -R/L & 0 & -\beta/L \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta/m & -k/m & -f/m \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

2) Per studiare l'andamento dell'impedenza in funzione della frequenza si determinerà la funzione di trasferimento tra la tensione di pilotaggio (ingresso del sistema) e la prima uscita (corrente di ingresso). Tale funzione di trasferimento è data da

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s + R/L) & 0 & \beta/L \\ 0 & s & -1 \\ -\beta/m & k/m & (s + f/m) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s^2 + (f/m)s + k/m}{L \det(sI - A)} . \end{aligned}$$

Calcolando il determinante di $(sI - A)$ ed effettuando opportune semplificazioni, si ottiene la seguente espressione dell'impedenza in funzione di ω

$$Z(j\omega) = \frac{1}{G_1(j\omega)} = R + j\omega L + j \frac{(\beta^2/m)\omega}{(k/m - \omega^2) + j(f/m)\omega} .$$

Sviluppando l'espressione precedente si ottiene il modulo dell'impedenza che, indicando con $d(\omega)$ l'espressione

$$d(\omega) = (k/m - \omega^2)^2 + (f/m)^2 \omega^2,$$

è dato da

$$\sqrt{\left[R + \frac{(\beta^2 f/m^2)\omega^2}{d(\omega)} \right]^2 + \left[L\omega + \frac{(k/m - \omega^2)(\beta^2/m)\omega}{d(\omega)} \right]^2} .$$

L'andamento di $\|Z(j\omega)\|$ in funzione della frequenza è riportato in Figura 11.2.

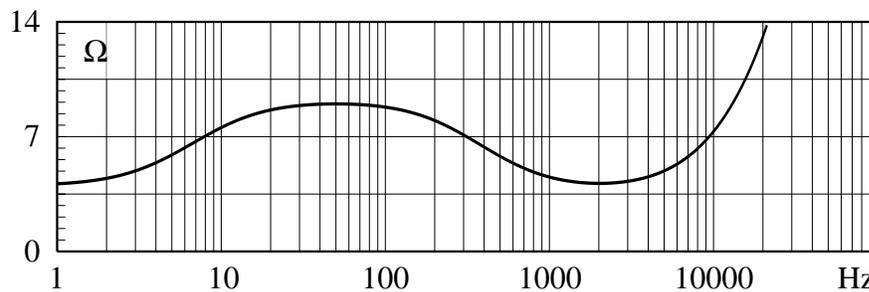


Fig. 11.2

Per quanto riguarda l'argomento dell'impedenza, dalla espressione di $Z(j\omega)$ si ottiene

$$\arg(Z(j\omega)) = \arctg\left(\frac{L\omega d(\omega) + (k/m - \omega^2) (\beta^2/m)\omega}{R d(\omega) + (\beta^2 f/m^2)\omega^2} \right)$$

il cui andamento in funzione della frequenza è riportato nella Figura 11.3.

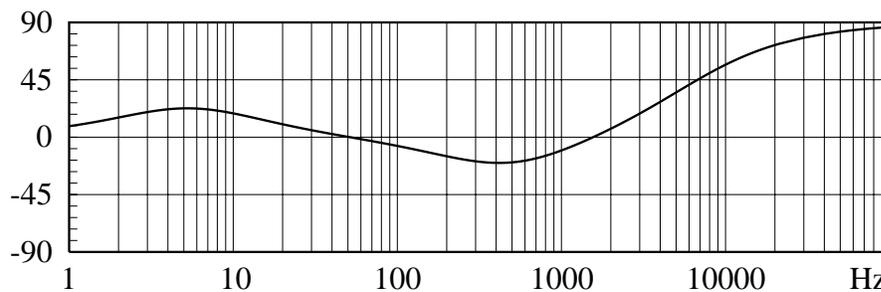


Fig. 11.3

3) Applicando come ingresso una tensione sinusoidale di pulsazione ω

$$u(t) = E \cos \omega t$$

la corrente a regime nella bobina mobile sarà data da

$$y_1(t) = \frac{E}{\|Z(j\omega)\|} \cos(\omega t + \phi_1(j\omega))$$

ove

$$\phi_1(j\omega) = \arg(Z(j\omega)) .$$

La potenza elettrica istantanea assorbita è quindi data da

$$P(t) = u(t)i(t) = \frac{E^2}{\|Z(j\omega)\|} \cos \omega t \cos(\omega t + \phi_1(j\omega)) .$$

L'integrale su un periodo fornisce, infine, l'espressione

$$P = \frac{E^2}{2 \|Z(j\omega)\|} \cos(\phi_1(j\omega))$$

che, per $E = 2V$, ha l'andamento riportato in Figura 11.4.

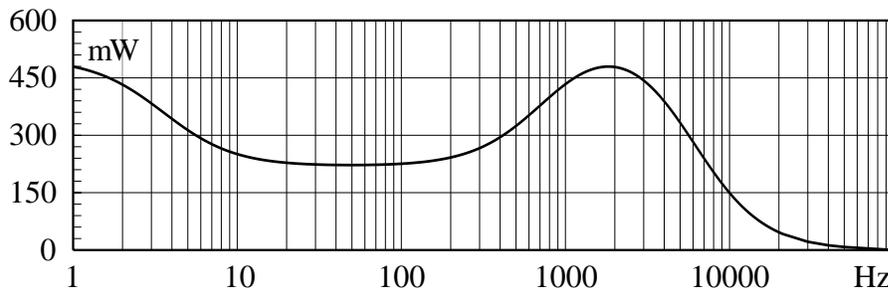


Fig. 11.4

4) La forza esercitata dal cono sull'aria è data da $f \cdot (dz/dt)$; la potenza acustica istantanea è quindi pari a

$$P_{ac}(t) = f \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 .$$

Per determinare tale potenza in funzione della frequenza è necessario calcolare la funzione di trasferimento tra la velocità del cono (seconda uscita del sistema) e l'ingresso. Procedendo in maniera analoga al calcolo dell'impedenza si ottiene

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s + R/L) & 0 & \beta/L \\ 0 & s & -1 \\ -\beta/m & k/m & (s + f/m) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \frac{\beta s}{m L \det(sI - A)} .$$

Sostituendo $j\omega$ ad s si ottiene, per il modulo di $G_2(j\omega)$, l'espressione

$$\|G_2(j\omega)\| = \frac{(\beta/mL)\omega}{\sqrt{\left[\frac{R}{L}\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - \frac{f\omega^2}{m}\right]^2 + \omega^2\left[\frac{\beta^2}{mL} + \frac{Rf}{mL} + \frac{k}{m} - \omega^2\right]^2}}.$$

L'argomento è dato da

$$\arg(G_2(j\omega)) = \text{arctg}\left(\frac{(R/L)(k/m - \omega^2) - (f/m)\omega^2}{\omega(\beta^2/mL + Rf/mL + k/m - \omega^2)}\right).$$

Applicando come ingresso una tensione sinusoidale di pulsazione ω

$$u(t) = E \cos \omega t$$

si ottiene, a regime, una velocità istantanea del cono data da

$$y_2(t) = \|G_2(j\omega)\| E \cos(\omega t + \phi_2(j\omega))$$

ove

$$\phi_2(j\omega) = \arg(G_2(j\omega)).$$

La potenza acustica istantanea risulta quindi pari a

$$P_{ac}(t) = f \|G_2(j\omega)\|^2 E^2 \cos^2(\omega t + \phi_2(j\omega)).$$

Integrando su di un periodo la funzione precedente si ottiene infine l'espressione

$$P_{ac} = \frac{f \|G_2(j\omega)\|^2 E^2}{2}$$

che ha, per $E = 2V$, l'andamento riportato in Figura 11.5.

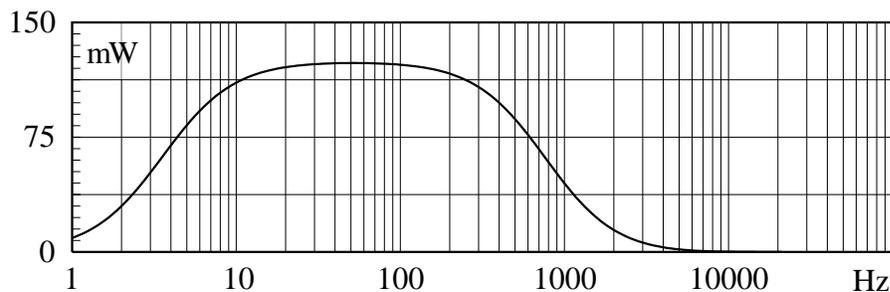


Fig. 11.5

OSSERVAZIONI

a) Si noti che la parte meccanica e quella elettrica interagiscono a causa del movimento della bobina mobile in un campo magnetico. Annullando tale campo ($\beta = 0$) la corrente nella bobina non avrebbe più alcun effetto sul movimento del cono e viceversa. Tale interazione è chiaramente osservabile nella matrice A che, per $\beta = 0$, diventa diagonale a blocchi con un blocco relativo al circuito elettrico ed uno relativo alla parte meccanica.

Si può ancora osservare come tale interazione influenzi la dinamica del sistema. Infatti il polinomio caratteristico di A è dato da

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \left(\frac{f}{m} + \frac{R}{L}\right) \lambda^2 + \left(\frac{\beta^2}{mL} + \frac{Rf}{mL} + \frac{k}{m}\right) \lambda + \frac{Rk}{mL}$$

che, con i valori assegnati, diventa

$$\lambda^3 + 4.2 \cdot 10^4 \lambda^2 + 1.801 \cdot 10^8 \lambda + 4 \cdot 10^9 .$$

I poli sono

$$\lambda_1 = -22.33$$

$$\lambda_2 = -4821.94$$

$$\lambda_3 = -37155.73$$

ed i moti associati sono tutti asintoticamente stabili; la dinamica del cono è essenzialmente determinata da λ_1 . Annullando il campo magnetico od interrompendo il circuito elettrico la dinamica del cono è descritta dall'equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m} z = 0 .$$

I poli della parte meccanica sono ora le radici dell'equazione

$$\lambda^2 + 2 \cdot 10^3 \lambda + 10^5 = 0 ,$$

dati da

$$\lambda_1 = -51.32$$

$$\lambda_2 = -1948.68 .$$

La dinamica di tale sistema è essenzialmente determinata da λ_1 (polo dominante) che ha ora un valore circa doppio rispetto al caso precedente. Tutte le considerazioni precedenti sono valide per un pilotaggio in tensione del dispositivo, che è approssimato molto bene dagli attuali amplificatori ad alta fedeltà; naturalmente

la resistenza e l'induttanza dei cavi di collegamento vanno a sommarsi a quelle del dispositivo peggiorandone il comportamento.

b) L'andamento del modulo dell'impedenza mostra come questa assuma un valore più elevato in corrispondenza della frequenza di risonanza del sistema (circa 50 Hz per il dispositivo in esame). A frequenze basse l'impedenza è assimilabile alla resistenza della bobina mobile; a frequenze alte alla sua reattanza induttiva. Il corrispondente andamento dell'argomento evidenzia che l'altoparlante in esame si comporta come un carico induttivo agli estremi della banda e come un carico capacitivo in un intervallo compreso tra la frequenza di risonanza e circa 1500 Hz.

c) Confrontando l'andamento della potenza assorbita con quello del modulo dell'impedenza si può notare come il minimo assorbimento si abbia in corrispondenza della frequenza di risonanza e come l'assorbimento tenda a zero al crescere della frequenza.

d) Confrontando il grafico relativo alla potenza ceduta all'ambiente con quello relativo alla potenza assorbita si può valutare il rendimento del dispositivo, che è massimo alla frequenza di risonanza. Si noti che la potenza ceduta all'ambiente tende a zero con la frequenza come in tutti i trasduttori di questo tipo. Si osservi infine che nel progetto dei trasduttori elettroacustici assume notevole importanza la risposta a particolari segnali di ingresso (es. impulso) periodici o meno. Il calcolo di tali risposte può essere effettuato nel dominio dei tempi determinando l'esponenziale della matrice dinamica come si è già visto in altri esercizi. Qualora l'ingresso sia periodico è possibile calcolare la risposta a regime anche nel dominio delle frequenze sviluppando in serie di Fourier il segnale di ingresso

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos(k\omega t + \xi_k)$$

ed applicando il principio della sovrapposizione degli effetti. La velocità di spostamento del cono, ad esempio, risulta data da

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \|G_2(jk\omega)\| E_k \cos(k\omega t + \xi_k + \phi_2(jk\omega)) .$$

Nella pratica applicazione di tale metodo si limiterà lo sviluppo in serie dell'ingresso ai soli termini più significativi.