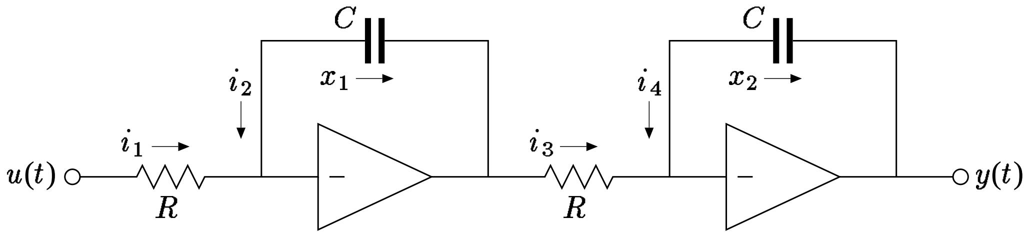
14 Sistemi in cascata

Si consideri il circuito di Figura 14.1 realizzato con amplificatori operazionali che si suppongono ideali.



R = 100 kΩ C = 0.5 μF

Fig. 14.1

1) Si determini un modello nello spazio degli stati per tale sistema;

2) Si valuti la stabilità;

3) Si determini la funzione di trasferimento.

SOLUZIONE

1) Il circuito assegnato è costituito da due amplificatori operazionali con identica retroazione collegati in cascata. Essendo presenti due condensatori si assumeranno come variabili di stato, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, le tensioni ai loro capi. Indicando con i_1, $i_2 \dots i_4$ le correnti nei quattro rami si possono scrivere, nell'ipotesi di amplificatori operazionali ideali, le seguenti relazioni

$$
\begin{aligned}
i_1 &= \frac{u}{R} \\
i_2 &= -i_1 \\
i_3 &= \frac{x_1}{R} \\
i_4 &= -i_3 \\
\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}\, i_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{C}\, i_4 \\
y &= x_2 \ .
\end{aligned}
$$

Eliminando le correnti dalle relazioni precedenti si ricavano le seguenti equazioni differenziali del prim'ordine

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{RC}\,u \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{RC}\,x_1 \ .\end{aligned}$$

Si è quindi ottenuto un modello nello spazio degli stati descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/RC & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1/RC \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

2) Sostituendo ad R e C i valori forniti dal testo dell'esercizio si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda^2$$

ed il sistema ha pertanto due poli coincidenti nulli. L'unica stabilità possibile in un sistema con tutti i poli nulli è quella semplice; per valutare se il sistema in esame sia semplicemente stabile si determinerà il polinomio minimo come rapporto tra il polinomio caratteristico ed il massimo comun divisore monico della matrice $\mathrm{agg}(\lambda I - A)$ che è data da

$$\mathrm{agg}\left(\lambda I - A\right) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \ .$$

Il divisore cercato è uguale ad 1 quindi il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico ed il sistema risulta instabile.

3) La funzione di trasferimento del sistema in esame è data da

$$\begin{aligned} G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1}B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \ . \end{aligned}$$