Stima dello stato in presenza di disturbi: il filtro di Kalman

Le misure dell'ingresso e dell'uscita dei processi reali sono spesso affette da errori; ciò rende non sempre idonei gli osservatori progettati supponendo esatte le misure. Si consideri il sistema dinamico lineare, non stazionario e continuo descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + w(t) \tag{1a}$$
$$y(t) = C(t)\,x(t) + v(t) \tag{1b}$$

con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e per il quale:

1) L'ingresso $u(t)$ sia misurabile esattamente per ogni $t \geq t_0$;

2) $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici Gaussiani bianchi, mutuamente incorrelati con matrici di covarianza note:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[w(t)\,v^T(\tau)\right] &= 0 \qquad \forall\, t, \tau \geq 0 \\ \mathrm{E}\left[w(t)\,w^T(\tau)\right] &= Q(t)\,\delta(t-\tau) \\ \mathrm{E}\left[v(t)\,v^T(\tau)\right] &= R(t)\,\delta(t-\tau)\ ; \end{aligned}$$

3) x_0 sia un vettore aleatorio con valore medio e matrice di covarianza nota:

$$\mathrm{E}\,[x_0] = \overline{x}_0 \qquad\qquad \mathrm{E}\left[(x-\overline{x}_0)(x-\overline{x}_0)^T\right] = P_0\ ;$$

4) I processi stocastici $w(t)$ e $v(t)$ siano incorrelati con il vettore aleatorio x_0:

$$\mathrm{E}\left[x_0\,w^T(t)\right] = 0 \qquad\qquad \mathrm{E}\left[x_0\,v^T(t)\right] = 0\ .$$

Si consideri ora l'osservatore identità per il modello (1):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\,\hat{x}(t) + B(t)\,u(t) + K(t)\left[y(t) - C(t)\,\hat{x}(t)\right] \tag{2}$$

con stato iniziale $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$. Si definisca l'errore di stima $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ e l'errore quadratico medio di stima

$$\mathrm{E}\left[e^T(t)\,e(t)\right]\ . \tag{3}$$

L'errore quadratico medio di stima all'istante t dipende dalla scelta di $\hat{x}_0$ e della matrice (funzione del tempo) $K(t)$ e fornisce una misura dell'attendibilità della stima $\hat{x}(t)$ all'istante t.

Il progetto dell'*osservatore ottimo* consiste nel scegliere $\hat{x}_0$ la matrice $K(t)$ in modo da minimizzare l'errore quadratico medio di stima (3). Se la matrice $R(t)$ è definita positiva (se cioè tutte le misure delle componenti del vettore di uscita sono affette da rumore) la soluzione del problema [Kalman–Bucy, 1961] è data da

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{4}$$
$$\hat{x}_0 = \overline{x}_0 \tag{5}$$

ove $P(t)$ è la soluzione dell'equazione di Riccati

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + Q(t) \tag{6}$$

con

$$P(t_0) = P_0\ . \tag{7}$$

La stima fornita dall'osservatore ottimo detto *filtro di Kalman*, è non polarizzata cioè il valor medio dell'errore di stima è nullo

$$\mathrm{E}\,[e(t)] = 0$$

mentre la sua matrice di covarianza coincide con $P(t)$:

$$\mathrm{E}\left[e(t)e^T(t)\right] = P(t)\ .$$

Il valore dell'errore quadratico medio di stima è dato da

$$\mathrm{E}\left[e^T(t)\,e(t)\right] = \mathrm{tr}\,[\,P(t)\,]\ .$$

La matrice $K(t)$ è detta matrice dei guadagni del filtro. Il filtro di Kalman è il dispositivo lineare che fornisce la stima con errore quadratico medio minimo; non esiste cioè alcun altro dispositivo algebrico o dinamico che, elaborando linearmente le misure $y(t)$ e $u(t)$, fornisca una stima dello stato con errore quadratico medio di stima minore. L'errore di stima $y(t) - C(t)\hat{x}(t)$ è detto *innovazione* ed è un processo stocastico bianco con matrice di covarianza uguale a quella di $v(t)$.

La non polarizzazione della stima $\hat{x}(t)$ dipende dalla condizione (5) ed è indipendente dalla particolare scelta della matrice dei guadagni $K(t)$. Posto infatti

$$\overline{x}(t) = \mathrm{E}\,[x(t)]\,, \qquad \overline{\hat{x}}(t) = \mathrm{E}\left[\hat{x}(t)\right], \qquad \overline{y}(t) = \mathrm{E}\,[y(t)]$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{x}}(t) &= A(t)\,\overline{x}(t) + B(t)\,u(t)\\
\overline{x}(t_0) &= \overline{x}_0\\
\overline{y}(t) &= C(t)\,\overline{x}(t)\\
\dot{\overline{\hat{x}}}(t) &= A(t)\,\overline{\hat{x}}(t) + B(t)\,u(t) + K(t)\left[\overline{y}(t) - C(t)\,\overline{\hat{x}}(t)\right]\\
\overline{\hat{x}}(t_0) &= \hat{x}_0.
\end{aligned}$$

Con la condizione (5) risulta $\mathrm{E}[e(t)] = \overline{x}(t) - \overline{\hat{x}}(t) = 0$ poiché il termine $\overline{y}(t) - C(t)\overline{\hat{x}}(t)$ è identicamente nullo indipendentemente dalla scelta di $K(t)$.

Matrice di covarianza dell'errore di stima

L'errore di stima è descritto dal modello

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\ e(t) + w(t) - K(t)\,v(t) \\ e(t_0) &= x_0 - \overline{x}_0\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Indicando con $P(t) = \mathrm{E}\{[e(t) - \overline{e}(t)][e(t) - \overline{e}(t)]^T\}$ la matrice di covarianza dell'errore di stima, si ottiene, dal modello (8),

$$\dot{P}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\ P(t) + P(t)\,[A(t) - K(t)C(t)]^T +\ Q(t) + K(t)R(t)K^T(t), \tag{9}$$

con la condizione iniziale $P(t_0) = P_0$ cioè, considerando la relazione (4), l'equazione di Riccati (6). L'equazione (9) può venire utilizzata anche per calcolare la matrice di covarianza dell'errore di stima utilizzando una matrice dei guadagni $K(t)$ diversa da quella ottima (4).

Il guadagno del filtro

Il filtro di Kalman è un osservatore identità nel quale, anche per i sistemi stazionari, la matrice dei guadagni varia nel tempo. Nell'osservatore identità la differenza tra la misura dell'uscita del sistema e la sua stima fornita dall'osservatore è un errore (innovazione) utilizzato per la correzione della stima cioè per estinguere l'errore iniziale. In ambiente stocastico l'innovazione deve essere usata anche per correggere gli effetti dell'errore di previsione; inoltre, a causa degli errori modellati tramite il processo $v(t)$, l'innovazione può essere non nulla anche quando la stima del vettore di stato è esatta. La matrice dei guadagni, $K(t)$, costituisce un compromesso tra due esigenze distinte: l'opportunità di utilizzare le misure disponibili per correggere la stima dello stato e la necessità di non peggiorare la stima corrente a causa degli errori sulla misura dell'uscita. Si può osservare come nell'osservatore ottimo la proporzionalità tra la matrice $K(t)$ e la matrice di covarianza dell'errore di stima $P(t)$ renda i guadagni dell'osservatore tanto più elevati quanto più elevato è, a parità di altre condizioni, l'errore sulla stima corrente. La proporzionalità tra la $K(t)$ ed il prodotto $C(t)R^{-1}(t)$ può essere interpretata come proporzionalità tra i guadagni dell'osservatore e l'affidabilità delle misure sull'uscita.

L'osservatore ottimo nel caso scalare stazionario

Si consideri il modello lineare e stazionario del primo ordine

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\,x(t) + w(t), \qquad\qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= x(t) + v(t) \end{aligned}$$

ove $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici bianchi con autocorrelazione data da:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,[w(t)w(\tau)] &= q\,\delta(t - \tau) \\ \mathrm{E}\,[v(t)v(\tau)] &= r\,\delta(t - \tau) \end{aligned}$$

L'equazione di Riccati è data, in questo caso, da

$$\dot{p}(t) - 2\,a\,p(t) + \frac{p^2(t)}{r} - q = 0, \qquad p(0) = p_0\ ;$$

il valore di regime di $p(t)$ è dato dalla radice positiva dell'equazione di secondo grado che si ottiene imponendo $\dot{p}(t) = 0$ nell'equazione precedente.

Stima di una costante scalare mediante il filtro di Kalman

Si supponga di volere stimare il valore di una costante scalare x_0 non nota a partire da una misura deteriorata da un errore costituito da rumore bianco. Il problema è descritto dal seguente modello

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0, \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= x(t) + v(t) \end{aligned}$$

ove

1) $v(t)$ è un processo stocastico scalare bianco con autocorrelazione nota

$$\mathrm{E}\,[\,v(t)\,v(\tau)\,] = \sigma_v^2\,\delta(t-\tau)\ ;$$

2) x_0 è una variabile aleatoria con valore medio $\overline{x}_0$ e varianza p_0 noti;

3) Il processo stocastico $v(t)$ è incorrelato con la variabile aleatoria x_0;

$$\mathrm{E}\,[\,x_0\,v(t)\,] = 0\ .$$

Il modello del filtro è dato da

$$\dot{\hat{x}}(t) = k(t)\,\left[y(t) - \hat{x}(t)\right], \qquad \hat{x}(0) = \overline{x}_0$$

dove

$$k(t) = \frac{1}{\sigma_v^2}\,p(t), \qquad \dot{p}(t) = -\frac{1}{\sigma_v^2}\,p^2(t), \qquad p(0) = p_0\ .$$

Integrando l'equazione di Riccati si ottiene

$$p(t) = \frac{p_0}{1 + (p_0/\sigma_v^2)\,t}, \qquad k(t) = \frac{p_0}{\sigma_v^2 + p_0\,t}\ .$$

Come si può osservare, per $t \to \infty$, $p(t)$ tende a zero e quindi la stima $\hat{x}(t)$ tende al valore da stimare x_0; dopo un tempo sufficientemente lungo si ha quindi a disposizione una stima esatta della grandezza da stimare. Inoltre, poiché per $t \to \infty$ anche $k(t)$ tende a zero, l'importanza attribuita alla misura disponibile diminuisce al crescere di t.

Il filtro di Kalman a tempo discreto

Si consideri il modello lineare discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k) + w(k) \\ y(k) &= C(k)\,x(k) + v(k) \end{aligned}$$

con stato iniziale $x(k_0) = x_0$ e per il quale

1) $u(k)$ sia una funzione nota a priori o misurabile per $k = k_0, k_0+1, \ldots$;

2) $w(k)$ e $v(k)$ siano processi stocastici discreti nel tempo, mutuamente incorrelati, bianchi e con matrici di covarianza note:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[\, w(j)\,v^T(k)\,\right] = O \\ &\mathrm{E}\left[\, w(j)\,w^T(k)\,\right] = Q(k)\,\delta_k^j, \qquad\qquad Q(k) > O \\ &\mathrm{E}\left[\, v(j)\,v^T(k)\,\right] = R(k)\,\delta_k^j, \qquad\qquad R(k) > O\ ; \end{aligned}$$

3) x_0 sia un vettore aleatorio con valore medio e matrice di covarianza noti

$$\mathrm{E}[x_0] = \overline{x}_0, \qquad\qquad \mathrm{E}\left[\,(x_0 - \overline{x}_0)\,(x_0 - \overline{x}_0)^T\,\right] = P_0\ ;$$

4) I processi stocastici $w(k)$ e $v(k)$ siano incorrelati con il vettore aleatorio x_0:

$$\mathrm{E}\left[\, x_0\,w^T(k)\,\right] = 0, \qquad\qquad \mathrm{E}\left[\, x_0\,v^T(k)\,\right] = 0\ .$$

L'osservatore identità per questo sistema è dato da

$$\hat{x}(k+1) = [\,A(k) - K(k)\,C(k)\,]\,\hat{x}(k) + B(k)\,u(k) + K(k)\,y(k)$$

con stato iniziale $\hat{x}(k_0) = \hat{x}_0$. Definendo l'errore di stima $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ e l'errore quadratico medio di stima

$$\mathrm{E}\left[\, e^T(k)\,e(k)\,\right]$$

il problema della determinazione di $\hat{x}_0$ e della matrice $K(j)$ che rendono minimo l'errore quadratico medio di stima è detto problema dell'osservatore ottimo a tempo discreto. Se $R(k)$ è definita positiva per ogni k la soluzione è data da

$$\begin{aligned} &\hat{x}(k_o) = \overline{x}_0 \\ &K(k) = A(k)\,P(k)\,C^T(k)\,\left[\,R(k) + C(k)\,P(k)\,C^T(k)\,\right]^{-1} \end{aligned}$$

essendo $P(k)$ soluzione dell'equazione di Riccati discreta

$$\begin{aligned} P(k+1) = &-A(k)\,P(k)\,C^T(k)\,\left[\,R(k) + C(k)\,P(k)\,C^T(k)\,\right]^{-1} C(k)\,P(k)\,A^T(k) + \\ &A(k)\,P(k)\,A^T(k) + Q(k) \end{aligned}$$

con condizione iniziale $P(k_0) = P_0$. La stima così ottenuta è non polarizzata e la matrice di covarianza dell'errore di stima coincide con la matrice $P(k)$. L'errore quadratico medio è dato da

$$\mathrm{E}\left[\, e^T(k)\, e(k) \,\right] = \mathrm{tr}\,[\, P(k)\,]\ .$$

Tale osservatore ottimo è detto filtro di Kalman a tempo discreto. La matrice $K(k)$ è detta matrice dei guadagni del filtro. Utilizzando l'espressione di $K(k)$ è possibile anche riscrivere l'equazione di Riccati discreta nella forma:

$$P(k+1) = [A(k) - K(k)\, C(k)]\, P(k)\, [A(k) - K(k)\, C(k)]^T + Q(k) + K(k)\, R(k)\, K^T(k)\ .$$

Filtro di Kalman stazionario

La non stazionarietà dell'osservatore ottimo è dovuta tanto alla non stazionarietà del sistema da osservare e dei processi stocastici in gioco quanto al fatto che il guadagno, dipendendo dalla soluzione dell'equazione di Riccati, è funzione del tempo. Nel caso di sistemi e di processi stocastici stazionari assume interesse studiare l'osservatore ottimo a regime. Si consideri il sistema dinamico lineare, stazionario e continuo descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t) + D\, w(t) \qquad (10a)$$

$$y(t) = C\, x(t) + v(t) \qquad (10b)$$

con lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e per il quale $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici stazionari bianchi con matrici di covarianza:

$$\mathrm{E}\left[w(t)\, w^T(\tau) \right] = Q\, \delta(t-\tau)$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)\, v^T(\tau) \right] = R\, \delta(t-\tau)\ ;$$

In tale caso, sotto condizioni poco restrittive, la soluzione a regime dell'equazione di Riccati è una soluzione, semidefinita positiva, P_∞, dell'equazione algebrica di Riccati

$$A\, P + P\, A^T - P\, C^T\, R^{-1} C\, P + D\, Q\, D^T = 0\ .$$

e l'osservatore ottimo stazionario minimizza l'errore quadratico medio di stima

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \mathrm{E}\left[\, e^T(t)\, e(t) \,\right]$$

per qualunque condizione iniziale P_0 (≥ 0); il valore dell'errore quadratico medio di stima è dato da

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \mathrm{E}\left[\, e^T(t)\, e(t) \,\right] = \mathrm{tr}\ [\, P_\infty\,]\ .$$

Nel progetto del filtro di Kalman stazionario non ha più importanza la conoscenza di $\overline{x}_0$ e della matrice di covarianza, P_0, del vettore x_0.

Il filtro di Kalman nell'identificazione di un sistema

Si consideri un sistema discreto a singolo ingresso e singola uscita descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

ove

$$Q(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$$
$$P(z) = \beta_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0.$$

Il modello può anche essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} y(k) + \alpha_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + \alpha_0\, y(k-n) = \\ \beta_{n-1}\, u(k-1) + \ldots + \beta_0\, u(k-n). \end{aligned} \tag{11}$$

Indicando, per semplicità, con a il vettore dei parametri,

$$a = \left[\, \alpha_{n-1} \ldots \alpha_0 \; \beta_{n-1} \ldots \beta_0 \,\right],$$

si supponga ora che tali parametri siano soggetti a perturbazioni descrivibili mediante relazioni del tipo

$$a_i(k+1) = a_i(k) + w_i(k)$$

ove $w_i(k)$ è un processo Gaussiano bianco a valor medio nullo indipendente da $w_j(k)$ per $i \neq j$. Si supponga anche che le misure disponibili dell'ingresso e dell'uscita siano affette da errori e che la (11) possa, a causa di tali errori, essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} y(k) + \alpha_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + \alpha_0\, y(k-n) = \\ \beta_{n-1}\, u(k-1) + \ldots + \beta_0\, u(k-n) + v(k) \end{aligned} \tag{12}$$

ove $v(k)$ è un processo Gaussiano bianco con valor medio nullo. Il problema della stima dei parametri a_i del sistema a partire dalle misure $y(k)$, $u(k)$, può essere basato sull'uso del filtro di Kalman considerando il processo con stato $x(k) = a(k)$ descritto dal modello

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + w(k), \\ y(k) &= C(k)\, x(k) + v(k), \end{aligned} \tag{13}$$

ove

$$C(k) = [-y(k-1) \ldots - y(k-n)\; u(k-1) \ldots u(k-n)]\,.$$

Il filtro di Kalman fornisce la stima

$$\hat{x}(k+1) = [I - K(k)C(k)]\, \hat{x}(k) + K(k)\, y(k)$$

ove

$$K(k) = P(k)C(k)^T \left[C(k)P(k)C(k)^T + R(k)\right]^{-1},$$

$$P(k+1) = P(k) - P(k)C(k)^T \left[C(k)P(k)C(k)^T + R(k)\right]^{-1} C(k)P(k) + Q(k),$$

$$R(k) = \mathrm{E}\,[v(k)^2], \qquad Q(k) = \mathrm{E}\,[w(k)\,w(k)^T].$$

Si noti come, nel caso di sistemi stazionari, risulti $Q(k) = 0.$ Si noti anche come sia necessario dare a priori una valutazione del valor medio e della varianza dei singoli parametri a_i. Il filtro inoltre non può essere attivato al tempo $k = 0$ perché per costruire la matrice $C(k)$ occorre attendere il tempo $k = n - 1$. Tale approccio è particolarmente utile per una identificazione in linea, che aggiorni i parametri di un modello moderatamente non stazionario in base alle misure via via disponibili; in applicazioni batch fornisce la stessa stima ottenibile utilizzando i minimi quadrati ordinari.