Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi

I modelli dei sistemi

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università di Bologna
Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna

Avvertenza: Vari contenuti di queste *slide*, che vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte, sono tratti dai seguenti testi ai quali si rimanda per una trattazione completa della materia:

Giovanni Marro - Teoria dei Sistemi e del Controllo, Zanichelli, Bologna.

Indice ed errata corrige: http://sting.deis.unibo.it/tds/Corso/Testi/Testi.htm

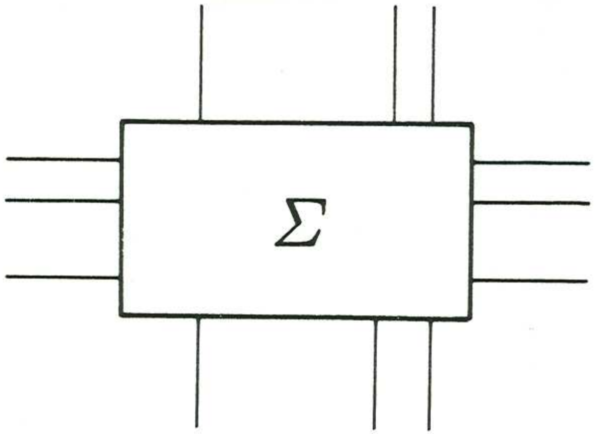
Giovanni Marro - Teoria dei sistemi: Fondamenti, Patron, Bologna.

(Il testo è fuori stampa ma è disponibile nella biblioteca Dore della Facoltà di Ingegneria)

1.1 Definizioni generali

Sistema ($\sigma\upsilon\sigma\tau\eta\mu\alpha$): Insieme di più parti legate da qualche forma di relazione.

Sistema (TDS): Oggetto, dispositivo o fenomeno la cui interazione con l'ambiente circostante si manifesta attraverso la variazione di attributi misurabili.

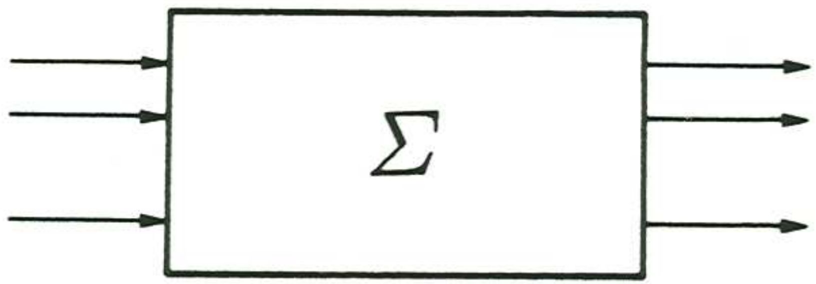


Modello matematico: Insieme di relazioni che descrivono i legami esistenti tra i vari attributi misurabili (variabili) del sistema considerato.

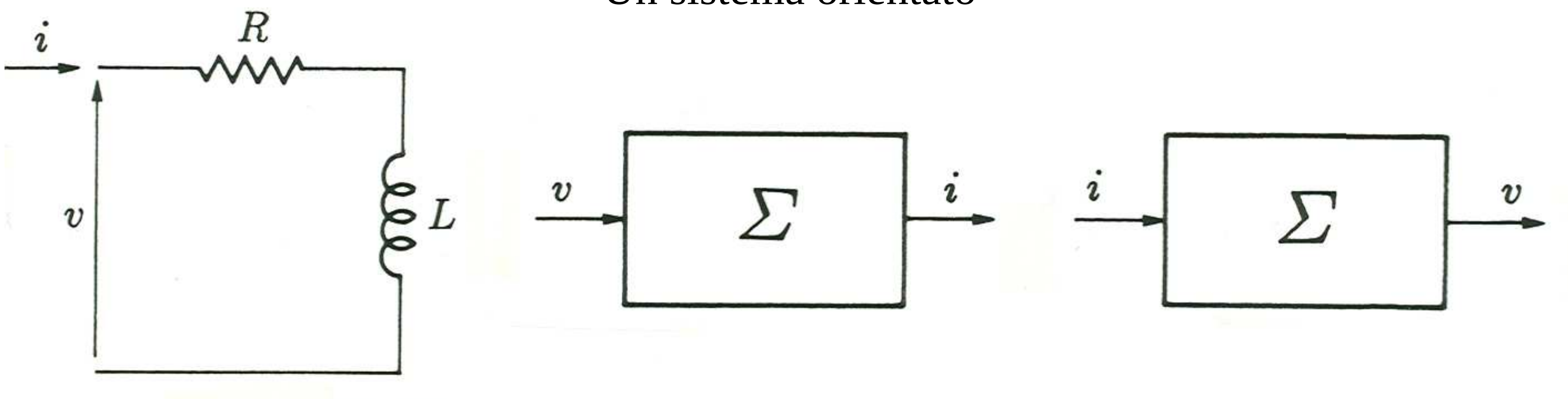
Ingressi: Variabili indipendenti (cause) che descrivono l'azione dell'ambiente esterno su di un sistema.

Uscite: Risposte del sistema agli ingressi applicati (effetti).

Sistemi orientati: Sistemi le cui variabili sono suddivise in ingressi ed uscite.



Un sistema orientato



Orientamenti diversi di uno stesso sistema

Sistemi algebrici: Sistemi nei quali i valori delle uscite in un certo istante dipendono solo dai valori degli ingressi allo stesso istante.

Sistemi dinamici: Sistemi nei quali i valori delle uscite in un certo istante dipendono anche dai valori assunti dagli ingressi in istanti precedenti.

1.2 I modelli dei sistemi

Stato: Informazione che riassume, in ogni istante, l'effetto della storia passata del sistema sul suo comportamento futuro.

Sistemi liberi: Sistemi privi di ingressi, che non subiscono alcuna influenza dall'ambiente circostante.

Insiemi associati ai modelli matematici dei sistemi:

– Insieme dei tempi, $\mathcal{T}$

– Insieme degli ingressi, $\mathcal{U}$

– Insieme delle funzioni di ingresso, $\mathcal{U}_f$

– Insieme degli stati, $\mathcal{X}$

– Insieme delle uscite, $\mathcal{Y}$

Sistemi continui e discreti: I sistemi sono detti *a tempo continuo* o *continui*, se è $\mathcal{T} = \mathcal{R}$, *a tempo discreto* o *discreti*, se è $\mathcal{T} = \mathcal{Z}$.

Sistemi algebrici: Un sistema *privo di memoria* o *algebrico* è descritto dagli insiemi $\mathcal{T}, \mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ e da una *funzione ingresso–uscita*:

$$y(t) = g\big(u(t), t\big). \tag{1.1}$$

Sistemi causali: Un sistema si definisce *causale* o *non anticipativo* se la sua uscita all'istante t non dipende dai valori che l'ingresso assumerà in istanti successivi.

Modello esterno di un sistema dinamico: Un modello esterno per un sistema dinamico è costituito dagli insiemi $\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e dalla *funzione di risposta*

$$y(t) = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big) \tag{1.2}$$

con le seguenti proprietà:

1) $\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ è definita per $t \geq t_0$, non necessariamente per $t < t_0$ (*orientamento del tempo*);

2) la dipendenza di γ dall'ingresso è limitata all'intervallo chiuso $[t_0, t]$ (*causalità*).

Stati indistinguibili in un intervallo: Due stati x_1 ed x_2 di un sistema dinamico si definiscono *indistinguibili* nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se

$$\gamma\big(t, t_0, x_1, u(\cdot)\big) = \gamma\big(t, t_0, x_2, u(\cdot)\big), \quad \forall\, t \in [t_0, t_1],\ \forall\, u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\ . \tag{1.3}$$

Stati equivalenti: Due stati x_1 e x_2 di un sistema dinamico che siano indistinguibili in $[t_0, t_1]$ per ogni coppia di istanti $t_0,\ t_1 \in \mathcal{T}$, $t_1 > t_0$ si definiscono *equivalenti*.

Sistemi in forma minima: Un sistema dinamico si dice in *forma minima* se privo di stati equivalenti.

Modello ingresso/stato/uscita di un sistema dinamico: Un modello ingresso/ stato/uscita per un sistema dinamico è costituito dagli insiemi $\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ e dalle *funzioni di transizione dello stato*

$$x(t) = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big) \tag{1.4}$$

e *di uscita*

$$y(t) = g\big(x(t), u(t), t\big) \tag{1.5}$$

con le seguenti proprietà:

1) $\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ è definita per $t \geq t_0$, non necessariamente per $t < t_0$ (*orientamento del tempo*);

2) la dipendenza di φ dall'ingresso è limitata all'intervallo chiuso $[t_0, t]$ (*causalità*);

3) lo stato in un istante t può essere calcolato attraverso un numero arbitrario di transizioni successive tra t_0 e t (*composizione*);

4) $x = \varphi(t, t, x, u(\cdot))$ (*consistenza*).

Teorema – Modello ingresso/stato/uscita implicato da un modello esterno: Ogni modello esterno (1.2) per un sistema dinamico in forma minima implica un modello ingresso/stato/uscita (1.4)-(1.5).

Teorema – Modello esterno implicato da un modello ingresso/stato/uscita: Ogni modello ingresso/stato/uscita (1.4)-(1.5) per un sistema dinamico implica un modello esterno del tipo (1.2).

Modelli differenziali ingresso/stato/ uscita: Un modello differenziale ingresso/stato/uscita per un sistema dinamico a tempo continuo è costituito dagli insiemi $\mathcal{T}$ $(= \mathcal{R})$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_f$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, da una *funzione di velocità di transizione dello stato*

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t), t\big) \ , \tag{1.6}$$

avente un'unica soluzione per ogni stato iniziale e ogni funzione di ingresso ammissibile, e da una *funzione di uscita*

$$y(t) = g\big(x(t), u(t), t\big) \ . \tag{1.7}$$

Modelli alle differenze ingresso/stato/uscita: Un modello alle differenze per un sistema dinamico a tempo discreto è composto dagli insiemi $\mathcal{T}$ $(= \mathcal{Z})$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_f$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, da una *funzione di stato futuro*

$$x(t+1) = f\big(x(t), u(t), t\big) \ , \tag{1.8}$$

e da una *funzione di uscita*

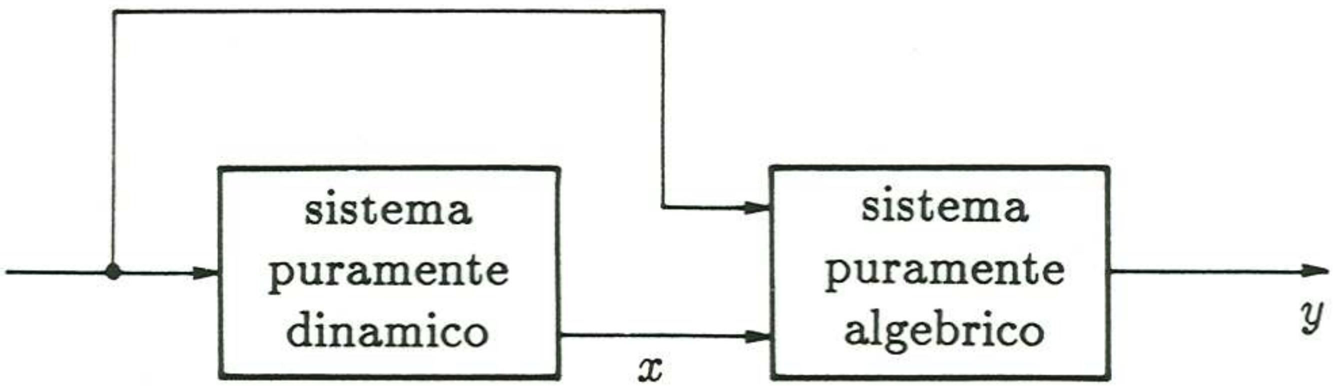
$$y(t) = g\big(x(t), u(t), t\big) \ . \tag{1.9}$$

Proprietà – Il modello differenziale (1.6)-(1.7) e quello alle differenze (1.8)-(1.9) definiscono un modello ingresso/stato/uscita (1.4)-(1.5) ed un modello esterno (1.2).

Sistemi puramente dinamici: Un sistema si definisce *puramente dinamico* quando la funzione d'uscita è del tipo

$$y(t) = g\big(x(t), t\big) \ . \tag{1.10}$$

Proprietà – Un sistema dinamico può sempre essere scomposto in un sistema puramente dinamico ed in un sistema algebrico interconnessi.



Scomposizione di un sistema dinamico

Sistemi stazionari: Un sistema si definisce *stazionario* o *costante* quando qualunque coppia $(x_0, u(\cdot))$ $(x_0 \in \mathcal{X}, u(\cdot) \in \mathcal{U}_f)$ determina la stessa evoluzione dello stato $x|_{[t_0,t]}$ e dell'uscita $y|_{[t_0,t]}$ per ogni t_0 e per ogni $t \geq t_0$. Nei modelli differenziali e alle differenze dei sistemi dinamici stazionari il tempo non compare come argomento esplicito.

Proprietà – Lo *stato* di un sistema dinamico è un elemento di un insieme (*insieme degli stati*) soggetto a variare nel tempo. Lo stato $x(t_0)$ a un dato istante t_0, unitamente al segmento di funzione d'ingresso $u|_{[t_0,t_1]}$, determina univocamente l'evoluzione dello stato $x|_{[t_0,t_1]}$ e dell'uscita $y|_{[t_0,t_1]}$.

Sistemi a stati finiti, sistemi a dimensioni finite e infinite: Un sistema dinamico viene detto a *stati finiti*, a *dimensioni finite*, a *dimensioni infinite* se l'insieme degli stati è rispettivamente un insieme finito, uno spazio vettoriale a dimensioni finite o uno spazio vettoriale a dimensioni infinite.

Sistemi compatibili – Due sistemi dinamici Σ_1 e Σ_2 si definiscono *compatibili* se hanno gli stessi insiemi dei tempi, degli ingressi, delle funzioni di ingresso e delle uscite cioè se $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_{f1} = \mathcal{U}_{f2} = \mathcal{U}_f, \mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$.

Sistemi equivalenti – Due sistemi dinamici Σ_1 e Σ_2 si definiscono *equivalenti* se sono compatibili e ad ogni stato $x_1 \in \mathcal{X}_1$ ($x_2 \in \mathcal{X}_2$) dell'uno si può associare uno stato $x_2 \in \mathcal{X}_2$ ($x_1 \in \mathcal{X}_1$) dell'altro tale che sia

$$\gamma_1\big(t, t_0, x_1, u(\cdot)\big) = \gamma_2\big(t, t_0, x_2, u(\cdot)\big) \qquad \forall\, t_0\,,\ \forall\, t \geq t_0\,,\ \forall\, u(\cdot) \in \mathcal{U}_f. \tag{1.11}$$

1.3 Moti, traiettorie, stati di equilibrio

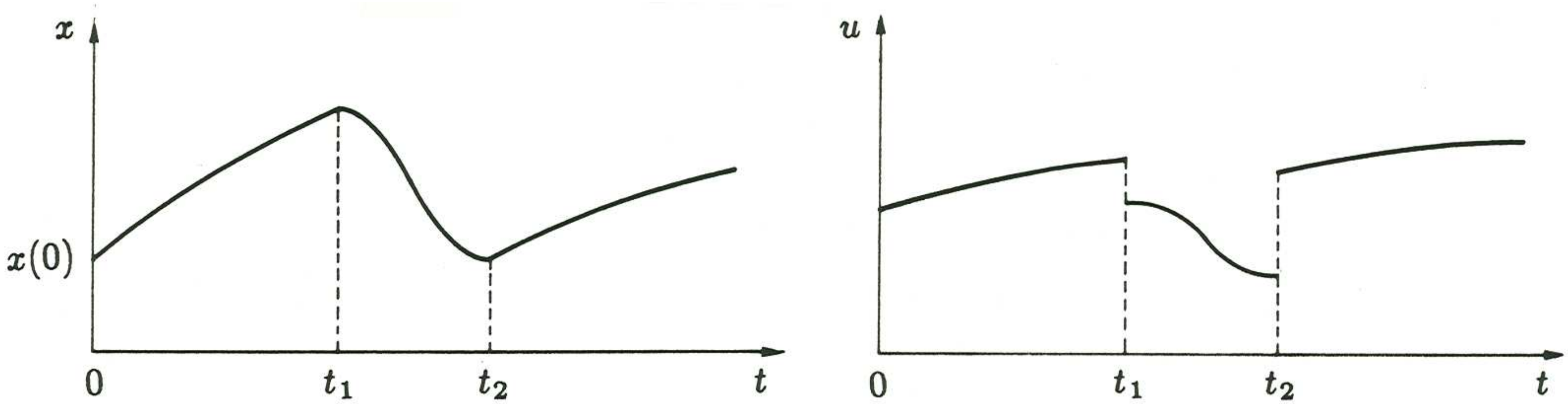
Evento, moto e traiettoria: La coppia $(t, x(t)) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$ prende il nome di *evento*: la funzione di transizione, noti l'evento iniziale $(t_0, x(t_0))$ e la funzione di ingresso $u(\cdot)$, fornisce un insieme di eventi che prende il nome di *moto*:

$$\Big\{(t, x(t))\ :\ x(t) = \varphi\big(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)\big)\,,\ t \in [t_0, t_1]\Big\} \tag{1.12}$$

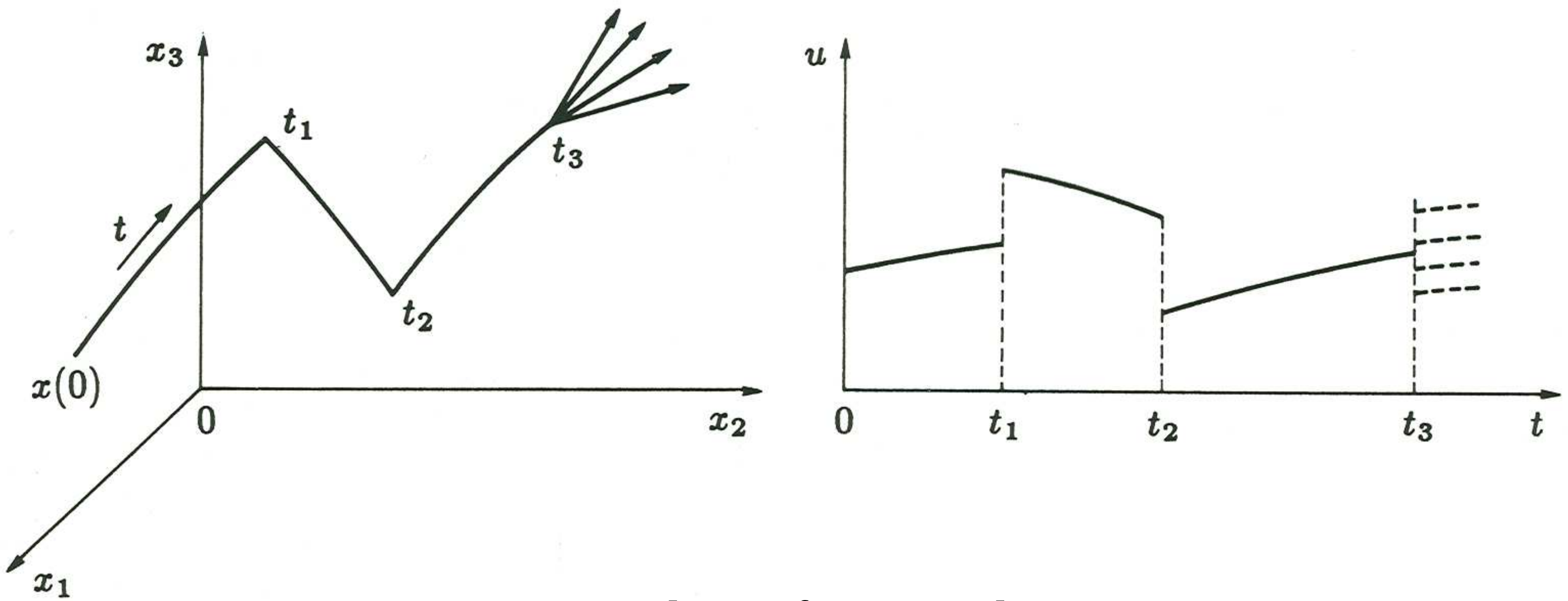
L'immagine del moto nell'insieme degli stati, cioè l'insieme

$$\Big\{x(t)\ :\ x(t) = \varphi\big(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)\big)\,,\ t \in [t_0, t_1]\Big\} \tag{1.13}$$

di tutti i valori assunti dallo stato in $[t_0, t_1]$ prende il nome di *traiettoria* in $[t_0, t_1]$.



Moto e relativa funzione di ingresso



Traiettoria e relativa funzione di ingresso

Stati di equilibrio: In un sistema dinamico uno stato $x \in \mathcal{X}$ è definito *di equilibrio temporaneo in* $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ tale che sia

$$x = \varphi\big(t, t_0, x, u(\cdot)\big) \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]\,. \tag{1.14}$$

Lo stato x è definito *di equilibrio* se è uno stato di equilibrio temporaneo in $[t_0, t_1]$ per ogni coppia $t_0,\ t_1 \in \mathcal{T}$, $t_1 > t_0$.

Uscite di equilibrio: In un sistema dinamico una uscita $y \in \mathcal{Y}$ è definita *di equilibrio temporaneo in* $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ ed uno stato x_0 tale che sia

$$y = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big) \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]\,. \tag{1.15}$$

L'uscita y è definita *di equilibrio* se è una uscita di equilibrio temporaneo in $[t_0, t_1]$ per ogni coppia $t_0,\ t_1 \in \mathcal{T}$, $t_1 > t_0$.

1.4 Sistemi lineari

Sistemi lineari: Un sistema dinamico è definito *lineare* se gli insiemi $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_f$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sono spazi vettoriali (sullo stesso campo di scalari $\mathcal{F}$) e le funzioni che compongono il suo modello sono lineari in x, u per tutti i t ammissibili.

I sistemi lineari algebrici sono descritti dal modello

$$y(t) = C(t)\,u(t)\ , \tag{1.16}$$

mentre il modello (1.6)-(1.7) è, per i sistemi dinamici lineari continui, del tipo

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\ , \tag{1.17}$$

$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)\ , \tag{1.18}$$

dove $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ indicano trasformazioni lineari dipendenti dal tempo che diventano costanti per i sistemi stazionari.

Per i sistemi dinamici lineari discreti le (1.8)-(1.9) diventano

$$x(k+1) = A_d(k)\, x(k) + B_d(k)\, u(k)\ , \tag{1.19}$$
$$y(k) = C_d(k)\, x(k) + D_d(k)\, u(k)\ , \tag{1.20}$$

ove $A_d(k)$, $B_d(k)$, $C_d(k)$, e $D_d(k)$ sono trasformazioni lineari, costanti per i sistemi stazionari.

Linearità di φ e γ: Si consideri un sistema dinamico lineare e si indichino con α, β due elementi del campo $\mathcal{F}$, con x_{01}, x_{02} due stati iniziali, e con $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ due funzioni di ingresso. Le funzioni φ e γ soddisfano le relazioni:

$$\varphi\big(t, t_0, \alpha\, x_{01} + \beta\, x_{02}, \alpha\, u_1(\cdot) + \beta\, u_2(\cdot)\big) = \alpha\, \varphi\big(t, t_0, x_{01}, u_1(\cdot)\big) + \beta\, \varphi\big(t, t_0, x_{02}, u_2(\cdot)\big)\ , \tag{1.21}$$
$$\gamma\big(t, t_0, \alpha\, x_{01} + \beta\, x_{02}, \alpha\, u_1(\cdot) + \beta\, u_2(\cdot)\big) = \alpha\, \gamma\big(t, t_0, x_{01}, u_1(\cdot)\big) + \beta\, \gamma\big(t, t_0, x_{02}, u_2(\cdot)\big)\ . \tag{1.22}$$

Scomposizione del moto: Nei sistemi lineari il moto corrispondente allo stato iniziale x_0 e alla funzione d'ingresso $u(\cdot)$ si può esprimere come somma del moto *con ingresso zero* corrispondente allo stato iniziale x_0 e del moto *con stato iniziale zero* corrispondente alla funzione di ingresso $u(\cdot)$.

Scomposizione della risposta: Nei sistemi lineari la risposta corrispondente allo stato iniziale x_0 e alla funzione d'ingresso $u(\cdot)$ si può esprimere come somma della risposta *con ingresso zero* corrispondente allo stato iniziale x_0 e della risposta *con stato iniziale zero* corrispondente alla funzione di ingresso $u(\cdot)$.

Proprietà – Due stati di un sistema lineare sono indistinguibili in $[t_0, t_1]$ se e solo se corrispondono alla stessa risposta libera in $[t_0, t_1]$.

Proprietà – Un sistema lineare è in forma minima se e solo se per ogni istante iniziale t_0 non esistono due diversi stati iniziali corrispondenti alla stessa risposta libera.

1.5 Raggiungibilità e controllabilità

Il termine *controllo* riferito ad un sistema dinamico fa in genere riferimento alla applicazione di una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ in grado di determinare un moto $x(\cdot)$ od una risposta $y(\cdot)$ di caratteristiche desiderate. Esempio di controllo è quello che porta da uno stato x_0 ad uno stato x_1 o da un evento (t_0, x_0) ad un evento (t_1, x_1): se ciò è possibile, si dice che il sistema è *controllabile* da x_0 a x_1 o da (t_0, x_0) a (t_1, x_1).

In tale situazione si dirà anche che “lo stato x_0 (o l’evento (t_0, x_0)) è controllabile allo stato x_1 (o all’evento (t_1, x_1))” e che “lo stato x_1 (o l’evento (t_1, x_1)) è raggiungibile dallo stato x_0 (o dall’evento (t_0, x_0))”.

L’analisi della possibilità o meno di controllare un sistema Σ fra due stati assegnati o fra due eventi assegnati si riconduce alla determinazione dei seguenti sottoinsiemi dello spazio degli stati $\mathcal{X}$:

$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0)$: insieme degli stati raggiungibili all’istante t_1 a partire dall’evento (t_0, x_0)

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0) := \left\{x_1 : x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_f\right\}$$

$\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0)$: insieme degli stati raggiungibili in un istante dell’intervallo $[t_0, t_1]$ a partire dall’evento (t_0, x_0)

$$\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0) := \left\{x_1 : x_1 = \varphi\big(\tau, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\ \tau\in[t_0, t_1],\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_f\right\}$$

$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1)$: insieme degli stati controllabili all’evento (t_1, x_1) a partire dall’istante t_0

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1) := \left\{x_0 : x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_f\right\}$$

$\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x_1)$: insieme degli stati controllabili all'evento (t_1, x_1) a partire da un istante dell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x_1) := \big\{x_0 : x_1 = \varphi\big(t_1, \tau, x_0, u(\cdot)\big),\ \tau \in [t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\big\}$$

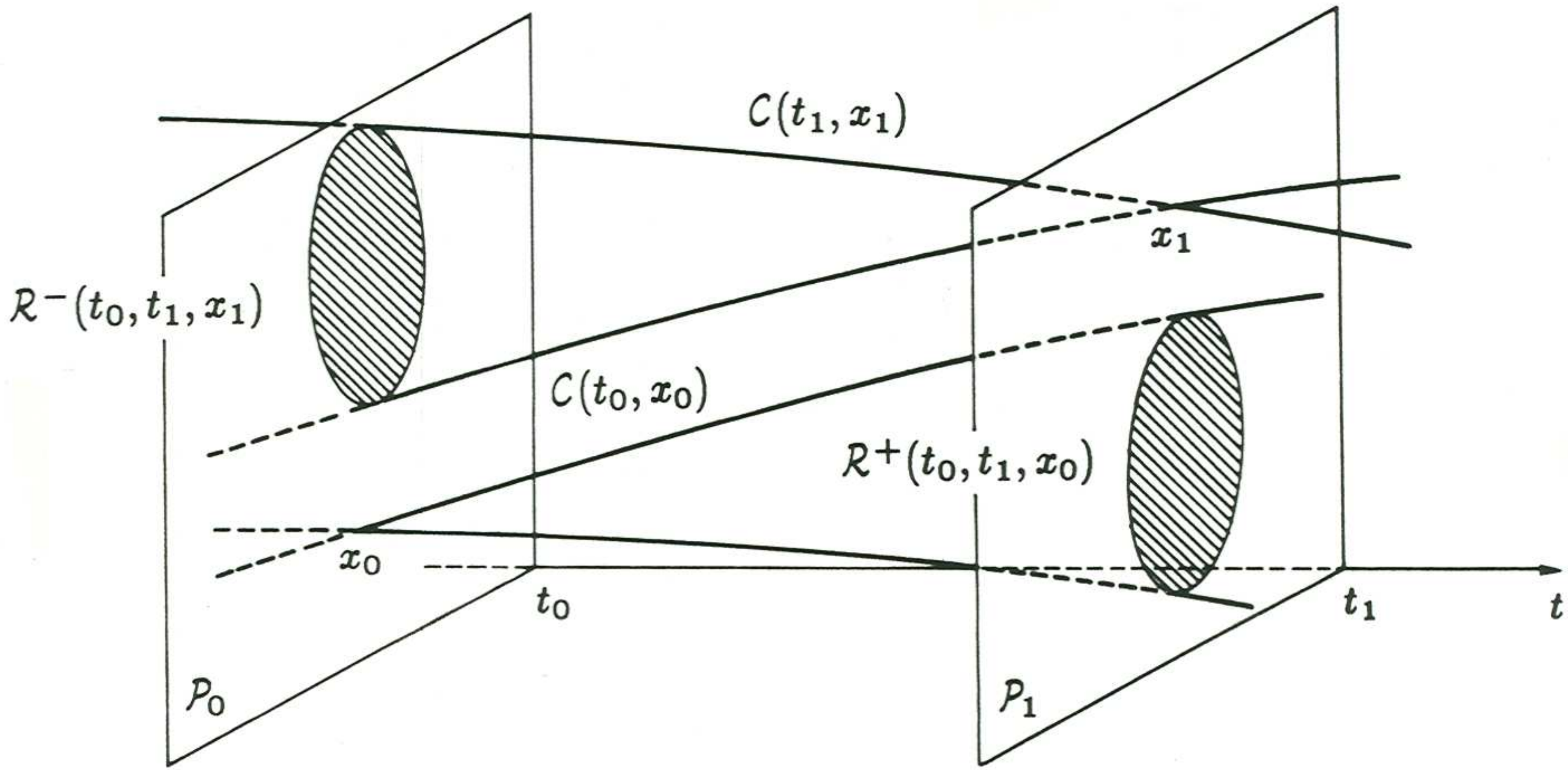
Risulta inoltre

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x) \subseteq \mathcal{W}^+(t_0, t_1, x) \quad \forall x \in \mathcal{X}\ , \tag{1.23}$$

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x) \subseteq \mathcal{W}^-(t_0, t_1, x) \quad \forall x \in \mathcal{X}\ . \tag{1.24}$$

Gli stati di un sistema Σ si dicono *completamente raggiungibili* dall'evento (t_0, x) nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se è $\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}$, *completamente controllabili* all'evento (t_1, x) nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se è $\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}$. In tali casi si dice anche che Σ è completamente raggiungibile dall'evento (t_0, x) in $[t_0, t_1]$ e che Σ è completamente controllabile all'evento (t_1, x) in $[t_0, t_1]$.

Nel caso dei sistemi stazionari gli insiemi $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x)$, $\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x)$, $\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x)$, $\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x)$ dipendono da t_0 e t_1, attraverso la differenza $t_1 - t_0$. In tal caso si assume $t_0 = 0$ e si impiegano i simboli più semplici $\mathcal{R}^+_{t_1}(x)$, $\mathcal{W}^+_{t_1}(x)$, $\mathcal{R}^-_{t_1}(x)$, $\mathcal{W}^-_{t_1}(x)$.



Insiemi $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x)$ e $\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x)$

Proprietà – Dati due istanti t_1, t_2 con $t_1 \leq t_2$, valgono le relazioni

$$\mathcal{W}^+_{t_1}(x) \subseteq \mathcal{W}^+_{t_2}(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\ , \tag{1.25}$$

$$\mathcal{W}^-_{t_1}(x) \subseteq \mathcal{W}^-_{t_2}(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\ . \tag{1.26}$$

Insiemi $\mathcal{W}^+(x)$ e $\mathcal{W}^-(x)$ – Gli insiemi $\mathcal{W}^+(x)$, $\mathcal{W}^-(x)$ sono definiti dalle relazioni

$$\mathcal{W}^+(x) := \lim_{t\to\infty} \mathcal{W}^+_t(x), \qquad \mathcal{W}^-(x) := \lim_{t\to\infty} \mathcal{W}^-_t(x)$$

cioè come gli insiemi degli stati raggiungibili da x o controllabili a x in un tempo comunque elevato.

Sistemi fortemente connessi – Un sistema stazionario si dice *fortemente connesso* o, più semplicemente, *connesso*, se è possibile ottenere la transizione fra due stati qualunque.

Teorema – In un sistema connesso vale, per ogni $x \in \mathcal{X}$, la relazione $\mathcal{W}^+(x) = \mathcal{W}^-(x) = \mathcal{X}$. È inoltre sufficiente che la condizione precedente sia soddisfatta per un singolo stato, x^*, perché un sistema sia connesso.

1.6 Ricostruibilità e osservabilità

Il termine *osservazione* riferito ad un sistema dinamico fa in genere riferimento alla determinazione dello stato iniziale $x(t_0)$ o dello stato finale $x(t_1)$ conoscendo l'evoluzione dell'ingresso e dell'uscita nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Per la determinazione dello stato finale il termine corretto è *ricostruzione*.

L'analisi della possibilità o meno di osservare o ricostruire lo stato di un sistema dinamico si riconduce alla determinazione dei seguenti sottoinsiemi dello spazio degli stati $\mathcal{X}$:

$\mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)\big)$: insieme degli stati iniziali compatibili con $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ in $[t_0, t_1]$

$$\mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)\big) := \big\{x_0 : y(\tau) = \gamma\big(\tau, t_0, x_0, u(\cdot)\big)\,,\ \tau \in [t_0, t_1]\big\}$$

$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$: insieme degli stati finali compatibili con $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ in $[t_0, t_1]$

$$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) := \big\{x_1 : x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)\big)\,,\ x_0 \in \mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)\big)\big\}$$

Ovviamente $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ in $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ e $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ devono essere congruenti quindi $y(\cdot)$ deve appartenere all'insieme

$$\mathcal{Y}_f\big(t_0, u(\cdot)\big) := \ \big\{y(\cdot) : y(t) = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big)\ ,\ t \geq t_0\ ,\ x_0 \in \mathcal{X}\big\}\ .$$

Definizione – Gli stati di un sistema dinamico Σ si dicono *diagnosticabili in* $[t_0, t_1]$ se esiste almeno una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ tale che l'insieme $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ contenga un solo elemento per ogni $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f(t_0, u(\cdot))$, si dicono *incasellabili in* $[t_0, t_1]$ se esiste almeno una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ tale che l'insieme $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ contenga un solo elemento per ogni $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f(t_0, u(\cdot))$. In tali casi si dice anche che Σ è diagnosticabile in $[t_0, t_1]$ e che Σ è incasellabile in $[t_0, t_1]$.

Definizione – Gli stati di un sistema dinamico Σ si dicono *completamente osservabili in* $[t_0, t_1]$ se per ogni funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ e per ogni funzione di uscita $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f(t_0, u(\cdot))$, $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ contiene un solo elemento, si dicono *completamente ricostruibili in* $[t_0, t_1]$ se per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ e per ogni $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f(t_0, u(\cdot))$, $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ contiene un solo elemento. In tali casi si dice anche che Σ è completamente osservabile in $[t_0, t_1]$ e che Σ è completamente ricostruibile in $[t_0, t_1]$.

Nel caso dei sistemi stazionari gli insiemi $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$, $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ dipendono da t_0 e t_1 solo attraverso la differenza $t_1 - t_0$. Si assume allora $t_0 = 0$ e si usano i simboli più semplici

$\mathcal{E}^-_{t_1}\big(u(\cdot), y(\cdot)\big)$: insieme degli stati iniziali compatibili con le funzioni $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ in $[0, t_1]$.

$\mathcal{E}^+_{t_1}\big(u(\cdot), y(\cdot)\big)$: insieme degli stati finali compatibili con le funzioni $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ in $[0, t_1]$.

Principali problemi di controllo e osservazione

1) *Controllo fra due stati assegnati:* Dati due stati x_0 e x_1 e due istanti t_0 e t_1, determinare una funzione di ingresso $u(\cdot)$ tale che sia $x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot))$;

2) *Controllo per ottenere un'uscita assegnata:* Dati uno stato iniziale x_0, un'uscita y_1 e due istanti t_0, t_1, determinare una funzione di ingresso $u(\cdot)$ tale che sia $y_1 = \gamma(t_1, t_0, x_0, u(\cdot))$;

3) *Controllo per ottenere una funzione di uscita assegnata:* Dati uno stato iniziale x_0, una funzione di uscita ammissibile $y(\cdot)$ e due istanti t_0, t_1, determinare una funzione di ingresso $u(\cdot)$ tale che sia $y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$;

4) *Osservazione dello stato:* Date le funzioni di ingresso e di uscita corrispondenti $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ e due istanti t_0, t_1, determinare lo stato iniziale x_0 (o l'insieme degli stati iniziali) con esse compatibile, cioè tale che sia $y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$;

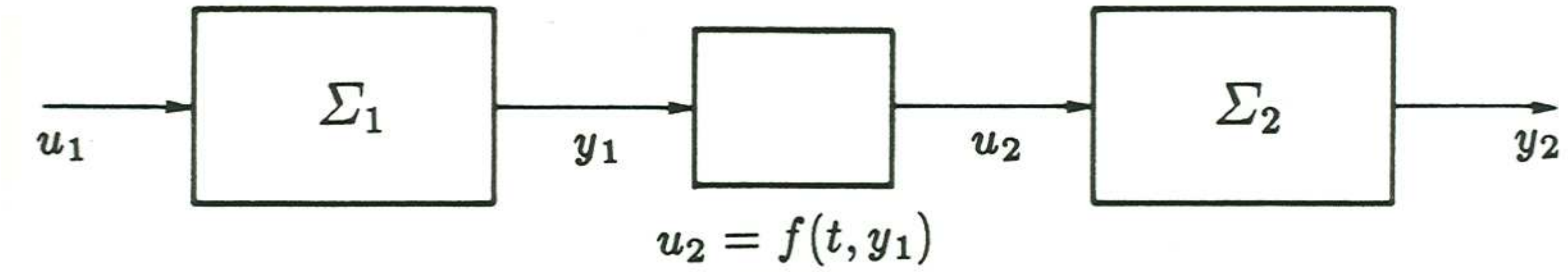
5) *Ricostruzione dello stato:* Date le funzioni di ingresso e di uscita corrispondenti $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ e due istanti t_0, t_1, determinare lo stato finale x_1 (o l'insieme degli stati finali) con esse compatibile, cioè associabile ad uno stato iniziale x_0 tale che sia $x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot))$, $y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$;

6) *Diagnosi:* Come 4), salvo che la soluzione comporta anche la scelta della funzione di ingresso più adatta;

7) *Incasellamento:* Come 5), salvo che la soluzione comporta anche la scelta della funzione di ingresso più adatta.

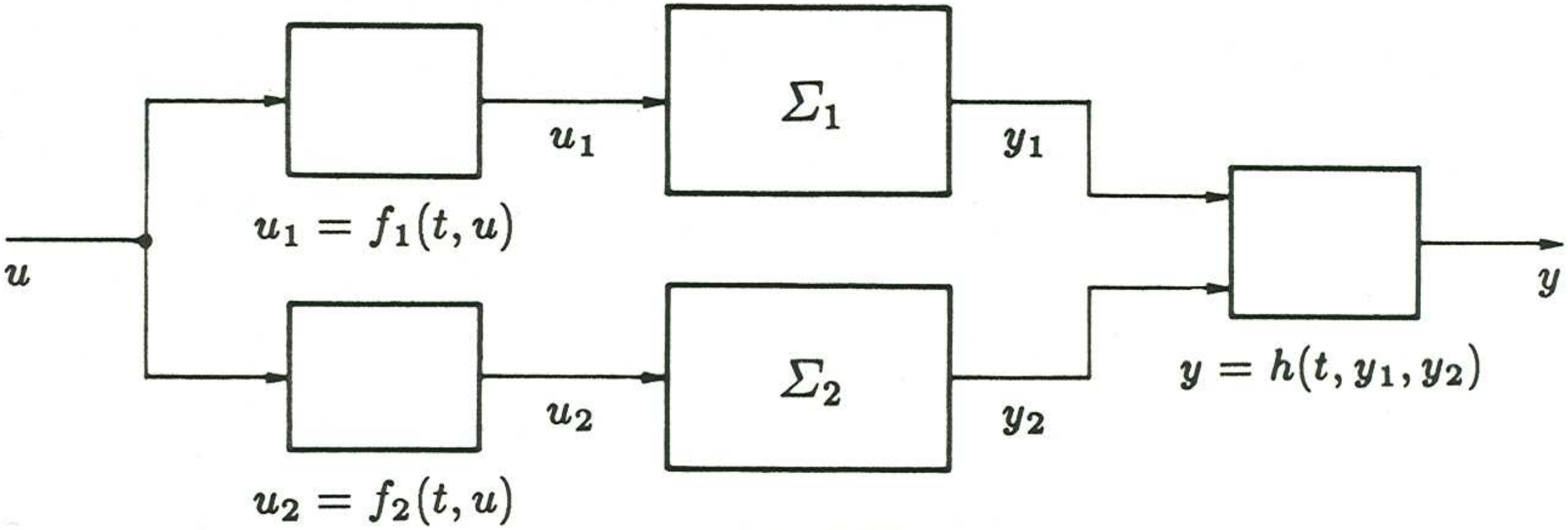
Interconnessioni dei sistemi

Cascata: Due sistemi dinamici Σ_1 e Σ_2 si dicono collegati in cascata quando l'ingresso di Σ_2 è in ogni istante funzione unicamente dell'uscita di Σ_1. E' necessario che sia $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. L'insieme degli ingressi del sistema complessivo è $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$, l'insieme delle uscite è $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_2$, l'insieme degli stati è $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.



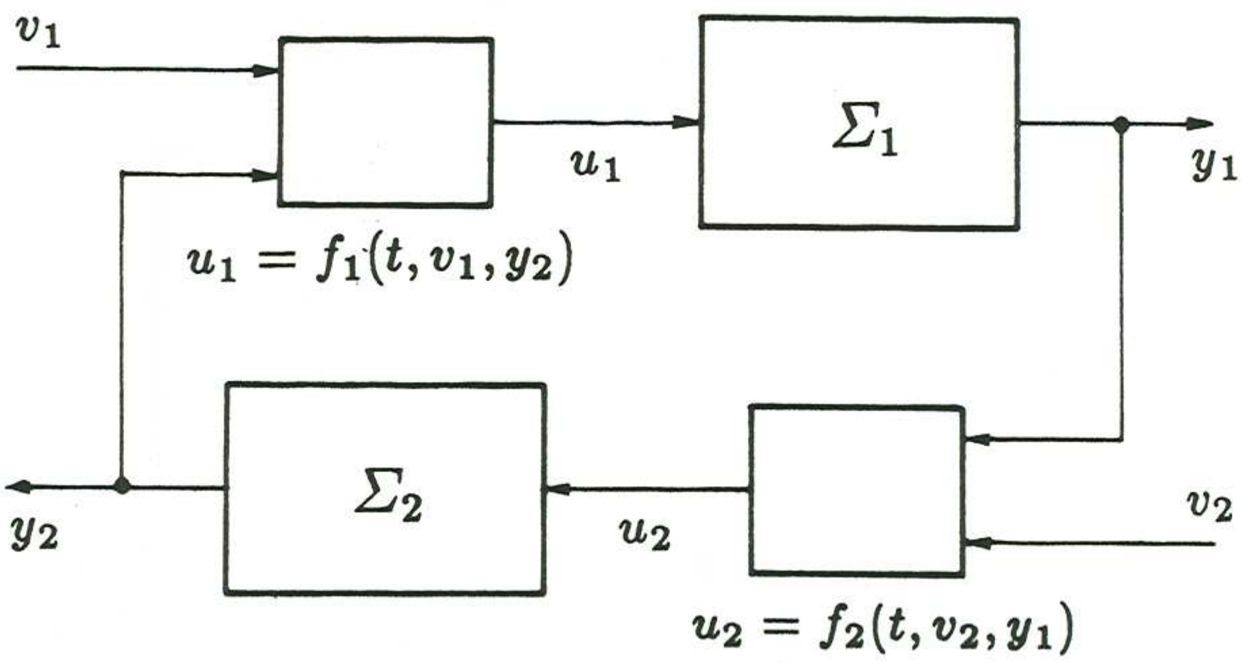
Sistemi in cascata

Parallelo: Due sistemi dinamici Σ_1 e Σ_2 si dicono collegati in parallelo quando i loro ingressi sono in ogni istante funzioni unicamente di una variabile $u \in \mathcal{U}$, che costituisce l'ingresso del sistema complessivo, mentre l'uscita $y \in \mathcal{Y}$ del sistema complessivo è in ogni istante funzione delle due uscite y_1 e y_2. Anche in questo caso si richiede che sia $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$; l'insieme degli stati del sistema complessivo è $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.



Sistemi in parallelo

Retroazione: Due sistemi dinamici Σ_1 e Σ_2 sono collegati in retroazione mutua quando i loro ingressi u_1 e u_2 sono in ogni istante funzioni rispettivamente delle uscite y_2 e y_1 e di due variabili $v_1 \in \mathcal{V}_1$, $v_2 \in \mathcal{V}_2$. Per il sistema complessivo è $\mathcal{U} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Anche in questo caso si richiede che sia $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.



Sistemi in retroazione mutua

I problemi della Teoria dei Sistemi

I problemi della teoria dei sistemi si possono dividere in due classi fondamentali: problemi di *analisi* e di *sintesi*, i primi concernenti lo studio delle proprietà intrinseche dei sistemi, di solito formulate e affrontate attraverso modelli matematici, i secondi orientati all'ottenimento di strumenti matematici o sottosistemi artificiali, chiamati *controllori* o *regolatori*, che realizzino un'adeguata influenza sul comportamento del sistema.

Problemi di analisi

Modellazione: Deduzione di un opportuno modello matematico per un sistema;

Analisi del moto e della risposta: Determinazione dell'evoluzione nel tempo dello stato (moto) e dell'uscita (risposta), dati lo stato iniziale e la funzione di ingresso;

Analisi della stabilità: In termini intuitivi, la stabilità è la proprietà di un sistema di reagire con variazioni limitate delle traiettorie dello stato e dell'uscita a variazioni limitate della funzione di ingresso;

Analisi della controllabilità: Studio della possibilità di raggiungere un dato stato od una data uscita o di ottenere particolari tipi di evoluzione dello stato o dell'uscita applicando opportune funzioni di ingresso ammissibili;

Analisi dell'osservabilità: Studio della possibilità di determinare lo stato di un sistema note che siano le funzioni di ingresso e uscita;

Analisi dell'identificabilità: Studio della possibilità di ricavare un modello ingresso–uscita oppure alcuni dei suoi parametri dalla conoscenza delle funzioni di ingresso e uscita.

Problemi di sintesi

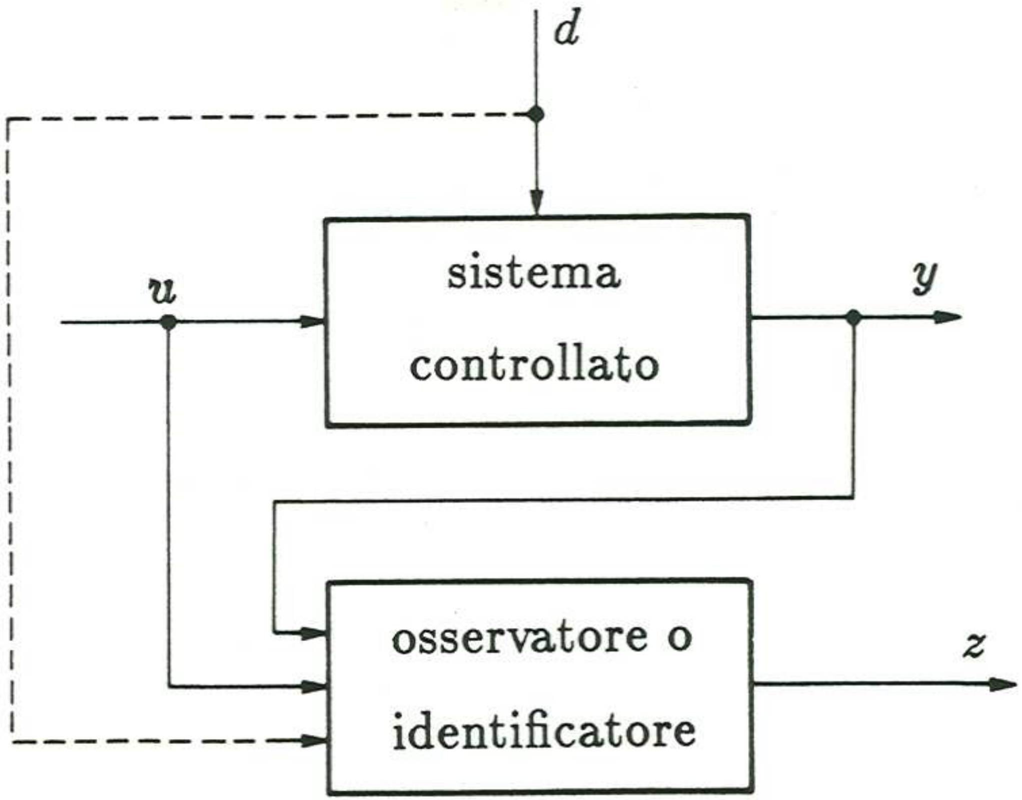
Sintesi dell'ingresso di controllo: Determinazione di una funzione di ingresso che, da uno stato iniziale, generi un moto od una risposta che realizzi un dato obiettivo di controllo;

Sintesi dell'ingresso di controllo, dello stato e dell'istante iniziale: Come al punto 1); oltre alla funzione di ingresso si deve però determinare anche lo stato iniziale e, nel caso non stazionario, l'istante iniziale che consentono di realizzare un dato obiettivo di controllo;

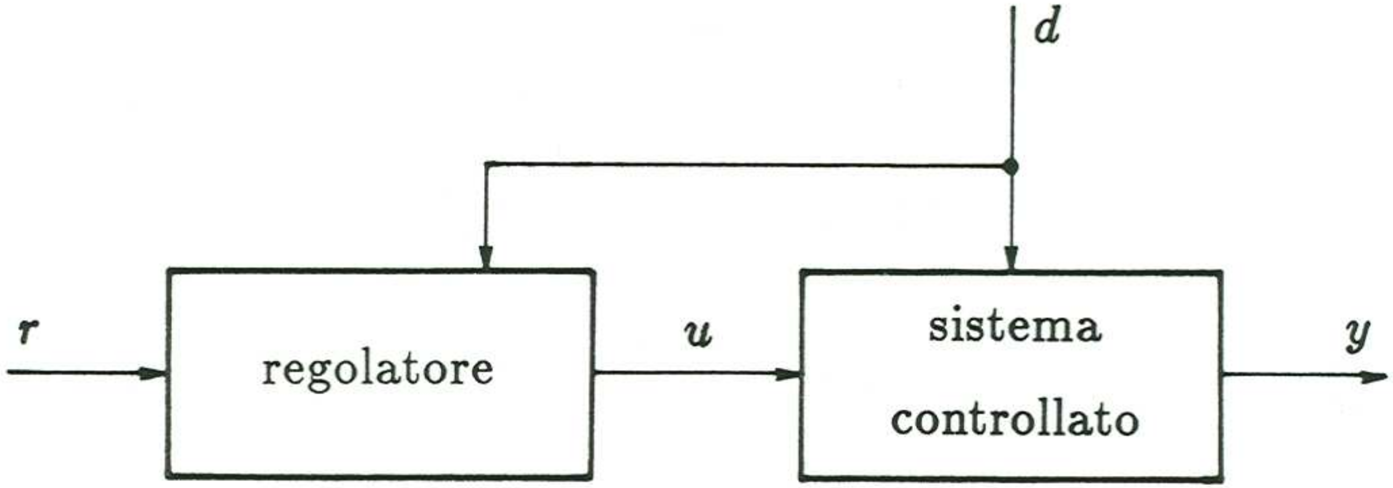
Sintesi di un osservatore dello stato: Determinazione di una procedura o di un dispositivo per dedurre lo stato di un sistema a partire da un segmento di lunghezza finita delle funzioni di ingresso e di uscita;

Sintesi di un identificatore: Determinazione di una procedura o di un dispositivo per ricavare un modello ingresso–uscita o alcuni dei suoi parametri a partire da un segmento di lunghezza finita delle funzioni di ingresso e uscita;

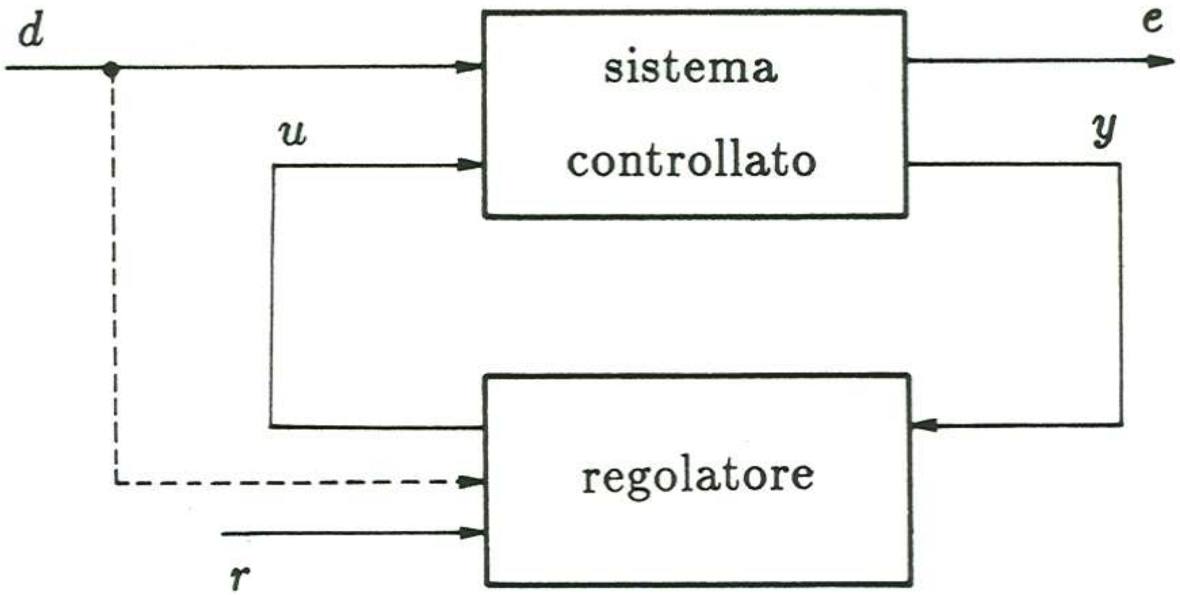
Sintesi di un dispositivo di controllo automatico: Progetto di un elaboratore che regoli automaticamente le variabili manipolabili di un sistema soggetto a controllo a partire da misure di alcune delle variabili di uscita per realizzare un dato obiettivo di controllo.



Osservazione dello stato o identificazione



Controllo in catena aperta



Controllo in catena chiusa