Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi

I Sistemi Dinamici Lineari non Stazionari

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università di Bologna
Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna

Avvertenza: Vari contenuti di queste *slide*, che vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte, sono tratti dai seguenti testi ai quali si rimanda per una trattazione completa della materia:

Giovanni Marro - Teoria dei Sistemi e del Controllo, Zanichelli, Bologna.

Indice ed errata corrige: http://sting.deis.unibo.it/tds/Corso/Testi/Testi.htm

Giovanni Marro - Teoria dei sistemi: Fondamenti, Patron, Bologna.

(Il testo è fuori stampa ma è disponibile nella biblioteca Dore della Facoltà di Ingegneria)

3.1 Evoluzione dello stato nei sistemi continui

Si consideri il modello differenziale di un sistema lineare, non stazionario e continuo, dato da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\\ y(t) &= C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)\end{aligned} \tag{1}$$

ove le matrici $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ sono matrici di funzioni del tempo con valori in $\mathcal{R}$ o in $\mathcal{C}$. Per descrivere le proprietà della soluzione della equazione differenziale precedente si consideri la omogenea associata

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \tag{2}$$

che descrive un sistema libero. In tale sistema il moto corrispondente allo stato iniziale x_0 al tempo t_0 è dato da

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, 0) \tag{3}$$

che, per la linearità della funzione φ, può essere scritto nella forma

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\,x_0 \tag{4}$$

ove la matrice $\Phi(t, t_0)$ prende il nome di *matrice di transizione*.

Osservazione – Tra le soluzioni della (2) definite dalla (4) esiste la soluzione $x(\cdot) = 0$, detta *soluzione ovvia*; per l'unicità della soluzione corrispondente ad un evento iniziale assegnato, tale soluzione è unica. Esiste quindi, nel sistema (2), un unico moto identicamente nullo, quello corrispondente a stato iniziale nullo.

Osservazione – Se $x_0 = e_i$ (i–esima colonna della matrice identità) nella (4) risulta

$$x(t) = \varphi_i(t, t_0) \tag{5}$$

ove $\varphi_i(t, t_0)$ indica la i–esima colonna della $\Phi(t, t_0)$. In base a tale osservazione si può anche caratterizzare la $\Phi(t, t_0)$ come soluzione dell'equazione differenziale matriciale

$$\dot{X}(t) = A(t)\, X(t) \tag{6}$$

con la condizione iniziale $X(t_0) = I$.

Teorema – La matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$ è non singolare per tutti i $t, t_0 \in \mathcal{R}$, $t \geq t_0$.

Dimostrazione: Si indichino con $\varphi_i(t, t_0)$ $(i=1, \ldots, n)$ le n colonne della matrice di transizione dello stato. Si supponga ora che per un particolare t la $\Phi(t, t_0)$ sia singolare;

vale allora, per un insieme di coefficienti α_i $(i=1,\ldots,n)$ non tutti nulli, la relazione

$$\alpha_1\varphi_1(t,t_0)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t,t_0)=0\ .$$

Il primo membro è una soluzione della (2) e, in quanto tale, ammette una sola soluzione che si annulla in un istante $t\geq t_0$, quella identicamente nulla. Anche all'istante t_0 risulta pertanto

$$\alpha_1\varphi_1(t_0,t_0)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t_0,t_0)=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n=0$$

il che non è possibile essendo i vettori e_i $(i=1,\ldots,n)$ linearmente indipendenti.

Teorema – L'insieme di tutte le soluzioni della (2) è uno spazio vettoriale ad n dimensioni.

Dimostrazione: Le (3) e (4) evidenziano come l'insieme delle soluzioni sia il campo della trasformazione lineare $\varphi(t,t_0,x(t_0),0)$ e sia pertanto uno spazio vettoriale. La non singolarità della $\Phi(t,t_0)$ assicura poi la condizione $\dim\operatorname{im}\varphi(t,t_0,x(t_0),0)=\dim\mathcal{X}=n$.

Osservazione – Il sistema dinamico (2) è sempre invertibile essendo possibile determinare lo stato iniziale in funzione di quello finale in qualunque intervallo $[t_0,t_1]$ grazie alla non singolarità della $\Phi(t,t_0)$:

$$x(t_0)=\Phi^{-1}(t_1,t_0)\,x(t_1)\ . \qquad (7)$$

Proprietà – La matrice di transizione $\Phi(t,t_0)$ soddisfa le seguenti proprietà

1) Inversione:

$$\mathit{\Phi}(t,t_0) = \mathit{\Phi}^{-1}\,(t_0,t)\ ; \tag{8}$$

2) Composizione:

$$\mathit{\Phi}(t,t_0) = \mathit{\Phi}(t,t_1)\,\mathit{\Phi}(t_1,t_0)\ ; \tag{9}$$

3) Separazione:

$$\mathit{\Phi}(t,t_0) = \mathit{\Theta}(t)\,\mathit{\Theta}^{-1}\,(t_0)\ ; \tag{10}$$

la (10) segue dalla (8) ponendo per esempio $\Theta(t)=\Phi(t,t^*)$ con t^* arbitrario;

4) Evoluzione nel tempo del determinante:

$$\det\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\ , \tag{11}$$

dove $\mathrm{tr}\,A$ indica la *traccia* della matrice A.

Proprietà – La successione di Peano-Baker

$$\Phi_0(t,t_0) = I, \quad \Phi_i(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,\Phi_{i-1}(\tau,t_0)\,\mathrm{d}\tau \quad (i=1,2,\dots) \tag{12}$$

converge uniformemente alla matrice di transizione dello stato $\mathit{\Phi}(t,t_0)$.

Proprietà – Gli elementi della matrice di transizione dello stato $\varPhi(t, t_0)$ sono funzioni continue del tempo.

Teorema: L'espressione del moto del sistema con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ e funzione d'ingresso continua a tratti $u(\cdot)$ è

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \; . \tag{13}$$

Dimostrazione: Si osservi innanzitutto che la (13) soddisfa la condizione iniziale considerata essendo $\Phi(t_0, t_0) = I$. Derivando poi rispetto al tempo ambo i membri ed applicando la regola per il calcolo della derivata di un integrale dipendente da un parametro data da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)\, \mathrm{d}x = f\big(b(t), t\big)\, \dot{b} \, - f\big(a(t), t\big)\, \dot{a} + \int_{a(t)}^{b(t)} \dot{f}(x, t)\, \mathrm{d}x$$

ove

$$\dot{f}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\, f(x, t) \; ,$$

si ottiene

$$\dot{x}(t) \quad = \dot{\Phi}(t, t_0)\, x_0 + \Phi(t, t)\, B(t)\, u(t) + \int_{t_0}^{t} \dot{\Phi}(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

cioè

$$\dot{x}(t) = A(t)\left(\Phi(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) + B(t)\,u(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t).$$

La sostituzione della (13) nella seconda delle (1) porta immediatamente alla seguente espressione per la funzione di risposta $\gamma\big(t,t_0,x_0,u(\cdot)\big)$:

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= C(t)\,\Phi(t,t_0)\,x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + D(t)\,u(t) \\ &= C(t)\,\Phi(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t}C(t)\,\Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + D(t)\,u(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Gli integrali a secondo membro delle (13) e (14) sono *integrali di convoluzione*, i cui *nuclei* sono le funzioni

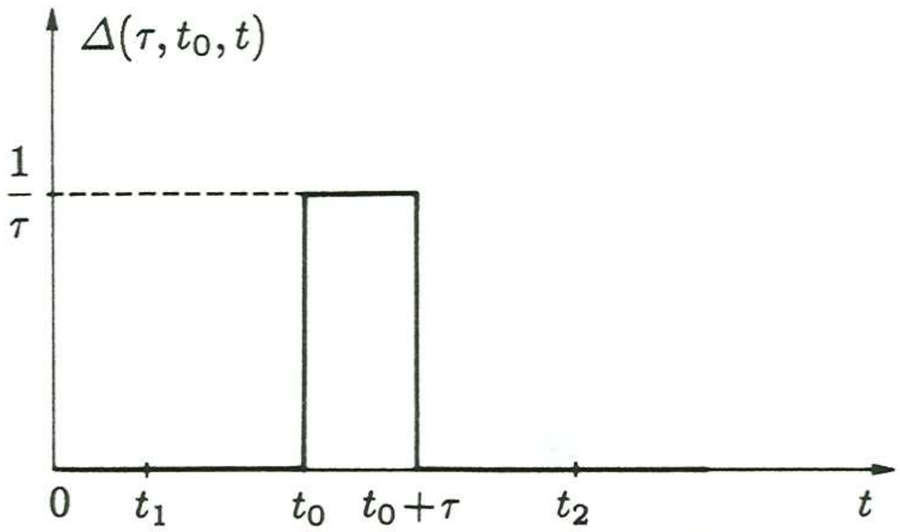
$$V(t,\tau) = \mathit{\Phi}(t,\tau)\,B(\tau) \tag{15}$$

$$W(t,\tau) = C(t)\,\mathit{\Phi}(t,\tau)\,B(\tau). \tag{16}$$

Definizione – La matrice $W(t,\tau)$ viene detta *risposta impulsiva* del sistema.

Teorema – L'elemento $w_{ij}(t,t_0)$ della matrice di risposta impulsiva $W(t,t_0)$ descrive la risposta osservata sulla i–esima uscita del sistema dinamico (1) a partire dallo stato iniziale $x(t_0)=0$ quando all'ingresso j–esimo viene applicato, al tempo t_0, l'impulso di Dirac.

Dimostrazione: Si consideri la funzione continua a tratti $\Delta(\tau,t_0,\cdot\ )$ rappresentata in figura e si supponga che il parametro τ sia fatto tendere a 0.



Un impulso

Al limite, si ottiene un *impulso di Dirac*, avente ampiezza infinita e area unitaria. L'impulso di Dirac applicato per $t=t_0$ viene indicato con $\delta(t-t_0)$. Si definisce

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \Delta(\tau, t_0, t)\,\mathrm{d}t = 1 \,.$$

Analogamente, considerando una qualunque funzione continua del tempo $f(\cdot)$, si definisce

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to 0} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\Delta(\tau, t_0, t)\,\mathrm{d}t = f(t_0) \,.$$

Ci si riferisca ora ad un sistema puramente dinamico con stato iniziale nullo e si applichi al suo j–esimo ingresso l'impulso di figura mantenendo gli altri ingressi a zero. Per $\tau \to 0$ si ottiene

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} W(t,\tau)\, e_j\, \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}\tau = W(t,t_0)\, e_j \quad (j=1,\ldots,p)$$

ove e_j indica la j–esima colonna della matrice identità. La colonna j–esima di $W(t,t_0)$ rappresenta quindi la risposta del sistema ad un impulso di Dirac applicato in t_0, con $x(t_0)=0$, al corrispondente ingresso; l'elemento i–esimo di tale colonna, $w_{ij}(t,t_0)$, è la risposta osservata sulla i–esima uscita.

La relazione (14) per un sistema puramente dinamico con stato iniziale zero diventa

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} W(t,\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \ . \tag{17}$$

La risposta con stato iniziale nullo di un sistema lineare puramente dinamico è quindi completamente descritta dalla sua risposta all'impulso. L'equazione (17) costituisce pertanto un *modello ingresso–uscita* per un sistema lineare.

3.2 Evoluzione dello stato nei sistemi discreti

Per tali sistemi si considera il modello alle differenze

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d(k)\, x(k) + B_d(k)\, u(k) \\ y(k) &= C_d(k)\, x(k) + D_d(k)\, u(k) \end{aligned} \tag{18}$$

e, analogamente al caso continuo, si potrà esprimere il moto a partire dallo stato iniziale x_0 all'istante iniziale j con ingresso nullo

$$x(i\,) = \varphi(i, j, x_0, 0) \tag{19}$$

nella forma

$$x(i) = \Phi(i, j)\, x(j) \tag{20}$$

ove la matrice di transizione $\Phi(i, j)$ può essere considerata come soluzione dell'equazione matriciale alle differenze

$$X(k+1) = A_d(k)\, X(k) \tag{21}$$

con condizione iniziale $X(j) = I$. Diversamente dal caso dei sistemi continui la $\Phi(i, j)$ può risultare singolare; ciò avviene se e solo se la matrice dinamica $A_d(k)$ risulta singolare per almeno un valore di k compreso tra j ed $i-1$. Risulta infatti:

$$\Phi(i, j) = A_d(i-1)\, A_d(i-2) \ldots A_d(j+1)\, A_d(j)\,. \tag{22}$$

La matrice di transizione $\Phi(i, j)$ soddisfa le seguenti proprietà:

1) Inversione:

$$\Phi(i, j) = \Phi^{-1}(j, i) \tag{23}$$

se $\Phi(i, j)$ è non singolare;

2) Composizione:

$$\Phi(i, j) = \Phi(i, k)\, \Phi(k, j)\,; \tag{24}$$

3) Separazione:

$$\Phi(i,j) = \Theta(i)\,\Theta^{-1}(j) \tag{25}$$

se esiste un k per cui $\Theta(j) = \Phi(k,j)$ è non singolare;

4) Evoluzione nel tempo del determinante:

$$\det \Phi(i,j) = \det A_d(i-1) \det A_d(i-2) \ldots \det A_d(j)\,. \tag{26}$$

L'evoluzione dello stato del sistema (18) è poi descritta dal seguente teorema.

Teorema – La soluzione dell'equazione alle differenze che descrive la dinamica del sistema con condizione iniziale $x(j) = x_0$ è data dalla funzione di transizione dello stato

$$x(i) = \Phi(i,j)\,x_0 + \sum_{k=j}^{i-1} \Phi(i,k+1)\,B_d(k)\,u(k)\,. \tag{27}$$

Sostituendo la (27) nella funzione di uscita si ottiene la funzione di risposta

$$y(i) = C_d(i)\,\Phi(i,j)\,x_0 + C_d(i) \sum_{k=j}^{i-1} \Phi(i,k+1)\,B_d(k)\,u(k) + D_d(i)\,u(i)\,. \tag{28}$$

La matrice

$$W(i,j) = C_d(i)\,\Phi(i,j+1)\,B_d(j) \tag{29}$$

è poi detta *risposta all'impulso* del sistema discreto considerato. Il suo significato è analogo al caso continuo: se il sistema è puramente dinamico, cioè se è $D_d(i) = O$, la k–esima colonna della $W(i,j)$ rappresenta la risposta da stato zero ad un ingresso identicamente nullo, eccetto che nella k–esima componente, uguale ad uno all'istante iniziale j. La $W(i,j)$ consente di determinare la risposta da stato zero di un sistema puramente dinamico attraverso la relazione

$$y(i) = \sum_{k=j}^{i-1} W(i,k)\,u(k)\,. \tag{30}$$

3.3 Passaggio da modelli continui a modelli discreti

È spesso utile considerare modelli discreti per descrivere sistemi continui ai quali sia applicato un ingresso soggetto a variazioni solamente negli istanti di tempo $t_0 + iT$ ($i = 0, 1, \ldots$) nei quali viene pure campionato il valore dell'uscita. Tale situazione si riscontra, ad esempio, quando si considerino sistemi di controllo digitali.

In tali casi le matrici $A_d(k)$, $B_d(k)$, $C_d(k)$ e $D_d(k)$ che descrivono il modello discreto sono legate alle matrici A, B, C e D che descrivono quello continuo dalle seguenti relazioni

$$A_d(k) = \Phi\big(t_0 + (k{+}1)T, t_0 + kT\big) \tag{31}$$

$$B_d(k) = \int_{t_0+kT}^{t_0+(k+1)T} \Phi\big(t_0 + (k{+}1)T, \tau\big)\, B(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{32}$$

$$C_d(k) = C(t_0 + kT) \tag{33}$$

$$D_d(k) = D(t_0 + kT)\ . \tag{34}$$

La matrice di transizione dello stato $\varPhi(i, j)$ è, in questo caso, sempre non singolare essendo la matrice di transizione di un modello continuo nell'intervallo $[(t_0 + jT), (t_0 + iT)]$.

3.4 Raggiungibilità e controllabilità

Teorema – Gli insiemi $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0)$ ed $\mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0)$ relativi a sistemi lineari sono sottospazi di $\mathcal{X}$.

Dimostrazione: L'insieme $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0)$ è un sottospazio in quanto immagine della trasformazione lineare $\varphi(t_1, t_0, 0, u(\cdot))$ da $\mathcal{U}_f$ a $\mathcal{X}$. Per quanto riguarda $\mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0)$ si osservi che se x_1 ed x_2 appartengono a tale sottoinsieme risulta, per opportune funzioni di ingresso $u_1(\cdot)$ ed $u_2(\cdot)$, $\varphi(t_1, t_0, x_1, u_1(\cdot)) = 0$ e $\varphi(t_1, t_0, x_2, u_2(\cdot)) = 0$. Per la linerità della funzione di transizione vale d'altronde, per ogni coppia di scalari α_1 e α_2, la relazione

$$\varphi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1(\cdot) + \alpha_2 u_2(\cdot)) = \alpha_1 \varphi(t_1, t_0, x_1, u_1(\cdot)) + \alpha_2 \varphi(t_1, t_0, x_2, u_2(\cdot)) = 0\,;$$

$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0)$ è pertanto un sottospazio di $\mathcal{X}$.

Nel caso dei sistemi lineari non stazionari gli insiemi $\mathcal{W}^+(t_0, t_1, 0)$, $\mathcal{W}^-(t_0, t_1, 0)$ in generale non sono sottospazi. Per la proprietà di scomposizione del moto vale poi la seguente proprietà.

Proprietà – Nel caso dei sistemi lineari l'insieme $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0)$ è la varietà lineare somma di uno stato arbitrario raggiungibile da x_0 in $[t_0, t_1]$ e del sottospazio $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0)$, l'insieme $\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1)$ è la varietà lineare somma di uno stato arbitrario da cui x_1 può essere raggiunto in $[t_0, t_1]$ e del sottospazio $\mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0)$.

Lemma – Si consideri una matrice $F(\cdot)$, $n \times m$, le cui righe siano funzioni del tempo continue in $[t_0, t_1]$ con valori in $\mathcal{R}^m$. Condizione necessaria e sufficiente perchè sia

$$F^T(t)\, x = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1] \tag{35}$$

è $x \in \ker G(t_0, t_1)$ con

$$G(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\, F^T(t)\, \mathrm{d}t\ . \tag{36}$$

Dimostrazione: La matrice $G(t_0, t_1)$ è simmetrica, in quanto integrale di una matrice simmetrica. Per ogni $x \in \mathcal{R}^n$ è

$$\langle x, G(t_0, t_1)\, x \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \| F^T(t)\, x \|_2^2\, \mathrm{d}t$$

da cui risulta che $G(t_0, t_1)$ è semidefinita positiva e che ogni $x \in \mathcal{R}^n$ tale che $\langle x, G(t_0, t_1)\, x \rangle = 0$ soddisfa pure la $F^T(t)\, x = 0$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$ e viceversa. Essendo $G(t_0, t_1)$ semidefinita positiva $\langle x, G(t_0, t_1)\, x \rangle = 0$ se e solo se è $x \in \ker G(t_0, t_1)$.

Se la (35) vale per $x \neq 0$, le righe di $F(\cdot)$ sono linearmente dipendenti in $[t_0, t_1]$, e questo, come si è visto, accade se e solo se la matrice $G(t_0, t_1)$ è singolare.

Teorema – I sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità del sistema (1) nell'intervallo $[t_0, t_1]$ sono dati da

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0) \quad = \operatorname{im} P(t_0, t_1) \tag{37}$$

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0) \quad = \Phi^{-1}(t_1, t_0) \operatorname{im} P(t_0, t_1) = \Phi(t_0, t_1) \operatorname{im} P(t_0, t_1) \tag{38}$$

ove $P(t_0, t_1)$ è la matrice simmetrica semidefinita positiva

$$P(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, B(\tau)\, B^T(\tau)\, \Phi^T(t_1, \tau)\, \mathrm{d}\tau \,. \tag{39}$$

Dimostrazione: Essendo $\ker P(t_0, t_1) = (\operatorname{im} P(t_0, t_1))^\perp$, per dimostrare la (37) basta verificare che gli stati diversi da zero appartenenti a $\ker P(t_0, t_1)$ non sono raggiungibili dall'origine in $[t_0, t_1]$ e che gli stati appartenenti a $\operatorname{im} P(t_0, t_1)$ invece lo sono.
Se x_1 è raggiungibile dall'origine in $[t_0, t_1]$, esiste una funzione di ingresso $u(\cdot)$ tale che

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \,. \tag{40}$$

Sia $x_1 \in \ker P(t_0, t_1)$. Moltiplicando scalarmente per x_1 ambo i membri della precedente relazione si ottiene

$$\langle x_1, x_1 \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(\tau)\, \Phi^T(t_1, \tau)\, x_1, u(\tau) \rangle \, \mathrm{d}\tau \ .$$

Per il Lemma precedente è $B^T(t)\, \Phi^T(t_1, t)\, x_1 = 0$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$, per cui, qualunque sia l'ingresso $u(\cdot)$, la condizione $x_1 \in \ker P(t_0, t_1)$ implica $x_1 = 0$.
Sia $x_1 \in \operatorname{im} P(t_0, t_1)$, per cui, indicando con $P^+(t_0, t_1)$ la pseudoinversa di $P(t_0, t_1)$, vale la relazione

$$x_1 = P(t_0, t_1)\, P^+(t_0, t_1)\, x_1 \ ;$$

sostituendo in questa l'espressione di $P(t_0, t_1)$ data dalla (39) si ottiene

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, B(\tau)\, B^T(\tau)\, \Phi^T(t_1, \tau)\, P^+(t_0, t_1)\, x_1 \, \mathrm{d}\tau$$

che, per confronto con la (40), stabilisce che x_1 è raggiungibile dall'origine applicando la funzione di ingresso

$$u(t) = B^T(t)\, \Phi^T(t_1, t)\, P^+(t_0, t_1)\, x_1 \ . \tag{41}$$

La (38) si prova notando che la relazione $x_0 \in \mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0)$ implica l'esistenza di un ingresso $u(\cdot)$ tale che

$$0 = \Phi(t_1, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

cioè

$$-\Phi(t_1, t_0)\, x_0 \in \mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0)$$

da cui

$$x_0 \in \Phi^{-1}(t_1, t_0)\, \mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0) = \Phi(t_0, t_1)\, \mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0)$$

e ciò completa la dimostrazione.

Osservazione – Il sistema (1) è completamente raggiungibile e completamente controllabile in $[t_0, t_1]$, vale cioè la condizione $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0) = \mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0) = \mathcal{R}^n$ quindi anche la condizione $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x) = \mathcal{R}^-(t_0, t_1, x) = \mathcal{R}^n$ per ogni $x \in \mathcal{R}^n$, se e solo se la matrice $P(t_0, t_1)$ (39) è non singolare (definita positiva).

Controllo fra due stati assegnati: Assegnati due stati, x_0 ed x_1, del sistema (4.1) determinare una funzione di ingresso $u(\cdot)$ che determini la transizione fra x_0 e x_1 in $[t_0, t_1]$.

Soluzione: La funzione di ingresso che determina tale transizione è la stessa che determina la transizione fra l'origine e lo stato $x_2 = x_1 - \Phi(t_1, t_0)\, x_0$, quindi perché il problema ammetta soluzione, deve essere $x_2 \in \mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0)$. Per la (41) si può assumere

$$u(t) = B^T(t)\, \mathit{\Phi}^T(t_1, t)\, P^+(t_0, t_1)\, x_2\,, \quad t \in [t_0, t_1]\,. \tag{42}$$

Tale legge di controllo è quella che corrisponde alla minima norma euclidea dell'errore sullo stato finale desiderato x_1 quando questo non sia raggiungibile da x_0.

Sistemi a tempo discreto

Per i sistemi discreti (18) si ottengono, in maniera del tutto analoga, i seguenti risultati:

$$\mathcal{R}^+(\,j, i, 0) = \operatorname{im} P(\,j, i\,) \tag{43}$$

$$\mathcal{R}^-(\,j, i, 0) = \Phi^{-1}(i, j\,)\operatorname{im} P(\,j, i\,) \tag{44}$$

in cui con $P(\,j, i\,)$ si indica la matrice simmetrica semidefinita positiva

$$P(\,j, i\,) = \sum_{k=j}^{i-1} \Phi(i, k+1)\, B_d(k)\, B_d^T(k)\, \Phi^T(i, k+1)\,. \tag{45}$$

Il problema del controllo fra due stati assegnati x_0 ed x_1 nell'intervallo $[\,j,i\,]$ si risolve mediante il controllo

$$u(k) = B_d^T(k)\,\Phi^T(i,k{+}1)\,P^+(\,j,i\,)\,x_2\,,\quad k\in[j,i{-}1] \tag{46}$$

ove $x_2 = x_1 - \Phi(i,j\,)\,x_0$.

3.5 Osservabilità e ricostruibilità

Proprietà – Come per ogni sistema dinamico la osservabilità in $[t_0,t_1]$ implica, nei sistemi lineari, la ricostruibilità in tale intervallo. La ricostruibilità in $[t_0,t_1]$ implica poi la osservabilità nello stesso intervallo nei sistemi continui.

Proprietà – Un sistema lineare diagnosticabile (o incasellabile) è anche completamente osservabile (o ricostruibile).

Dimostrazione: In base alla proprietà di scomposizione della risposta, si può scrivere

$$\mathcal{E}^-\big(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)\big) = \big\{x\;:\;y(\tau)=\gamma(\tau,t_0,x,0)+\gamma\big(\tau,t_0,0,u(\cdot)\big)\,,\;\tau\in[t_0,t_1]\big\}$$

Posto

$$y_1(t) = \gamma\big(t, t_0, 0, u(\cdot)\big)$$

si ottiene

$$\mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)\big) = \mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, 0, y(\cdot) - y_1(\cdot)\big) = \mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, 0, y_0(\cdot)\big) \qquad (47)$$

in cui $y_0(\cdot) = y(\cdot) - y_1(\cdot)$ è la risposta libera, dipendente unicamente dallo stato all'istante t_0. Dalla proprietà di scomposizione del moto si ottiene poi

$$\mathcal{E}^+\big(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)\big) = \Phi(t_1, t_0)\, \mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, 0, y_0(\cdot)\big) + \big\{\varphi\big(t_1, t_0, 0, u(\cdot)\big)\big\} \qquad (48)$$

Se l'insieme (47) contiene un solo elemento, ciò avviene anche per l'insieme (48), mentre l'inverso vale solo se la matrice $\Phi(t_1, t_0)$ è non singolare, in particolare quindi per i sistemi continui. Se gli insiemi (47) e (48) contengono un solo elemento, ciò avviene poi indipendentemente dall'ingresso $u(\cdot)$.

Proprietà – Nel caso dei sistemi lineari gli insiemi $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, 0, 0)$, $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, 0, 0)$ sono sottospazi di $\mathcal{X}$.

Dimostrazione: L'insieme $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, 0, 0)$ è un sottospazio in quanto spazio nullo della trasformazione lineare da $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}_f$ che associa ad ogni $x \in \mathcal{X}$ $y(\tau) = \gamma(\tau, t_0, x, 0)$, $\tau \in [t_0, t_1]$.

L'insieme $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, 0, 0)$ è un sottospazio essendo il trasformato del precedente secondo la trasformazione lineare da $\mathcal{X}$ a $\mathcal{X}$ espressa dalla matrice di transizione $\Phi(t_1, t_0)$.

Per la proprietà di linearità della risposta con ingresso nullo si può poi stabilire il seguente risultato.

Proprietà – Nel caso dei sistemi lineari l'insieme $\mathcal{E}^-\big(t_0, t_1, 0, y_0(\cdot)\big)$ è la varietà lineare somma di uno stato iniziale arbitrario corrispondente alla risposta libera $y_0(\cdot)$ in $[t_0, t_1]$ e del sottospazio $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, 0, 0)$, l'insieme $\mathcal{E}^+\big(t_0, t_1, 0, y_0(\cdot)\big)$ è la varietà lineare somma di uno stato finale arbitrario corrispondente alla risposta libera $y_0(\cdot)$ in $[t_0, t_1]$ e del sottospazio $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, 0, 0)$.

I sottospazi di inosservabilità $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, 0, 0)$ e di non ricostruibilità $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, 0, 0)$ possono essere calcolati in base al teorema seguente.

Teorema – I sottospazi $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, 0, 0)$ ed $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, 0, 0)$ del sistema (1) sono

$$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, 0, 0) = \ker Q(t_0, t_1) \tag{49}$$

$$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, 0, 0) = \Phi(t_1, t_0) \ker Q(t_0, t_1) \tag{50}$$

ove $Q(t_0,t_1)$ è la matrice simmetrica semidefinita positiva

$$Q(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)\, C^T(\tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau,t_0)\, \mathrm{d}\tau \ . \tag{51}$$

Dimostrazione: Perchè risulti

$$y_0(t) = C(t)\, \Phi(t,t_0)\, x_0 = 0 \quad \forall\, t \in [t_0,t_1]$$

è necessario e sufficiente, in base al Lemma visto in precedenza, che $x_0 \in \ker Q(t_0,t_1)$. D'altronde, se lo stato iniziale x_0 appartiene a $\mathrm{im}\, Q(t_0,t_1)$, esso si può determinare univocamente dalla risposta libera $y_0(t)$. Si consideri infatti la relazione $x_0 = Q^+(t_0,t_1)\, Q(t_0,t_1)\, x_0$ e vi si sostituisca la (51), ottenendo

$$x_0 = Q^+(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)\, C^T(\tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau,t_0)\, x_0\, \mathrm{d}\tau$$

cioè

$$x_0 = Q^+(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)\, C^T(\tau)\, y_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau \ . \tag{52}$$

La (50) discende poi immediatamente dalla (48).

Corollario – Il sistema (1) è completamente osservabile e ricostruibile in $[t_0, t_1]$ se e solo se la matrice $Q(t_0, t_1)$ (51) è non singolare (definita positiva).

Osservazione dello stato iniziale: Assegnate le funzioni $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ del sistema (1) nell'intervallo $[t_0, t_1]$, determinare lo stato iniziale x_0.

Soluzione: Si determina anzitutto la risposta libera

$$y_0(t) = y(t) - C(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau - D(t)\, u(t)$$

e si impiega la (52). Per le proprietà della pseudoinversa, il secondo membro della (52) fornisce direttamente la proiezione dello stato iniziale sul complemento ortogonale di $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, 0, 0)$, proiezione che coincide con x_0 se il sistema è completamente osservabile. Il problema della ricostruzione dello stato finale x_1 o della sua proiezione x_2 sul complemento ortogonale di $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, 0, 0)$ se il sistema non è completamente ricostruibile si risolve in maniera analoga. Se il sistema è completamente osservabile, cioè se il problema della determinazione dello stato iniziale ammette un'unica soluzione, mediante la relazione (13) scritta per $t = t_1$, si può dedurre x_1 noto x_0.

Sintesi di un osservatore dello stato – La determinazione dello stato iniziale o dello stato finale di un sistema lineare non stazionario può essere effettuata utilizzando un elaboratore che risolva un sistema di equazioni differenziali. Si consideri infatti il sistema aggiunto di (1) dato da

$$\dot{p}(t) = -A^T(t)\,p(t) + C^T(t)\,y_0(t) \tag{53}$$

che, risolto in $[t_0, t_1]$ con condizione iniziale $p(t_0)=0$, fornisce (essendo $\Psi(t_1, t_0) = \Phi^T(t_0, t_1)$)

$$p(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t_1, \tau)\,C^T(\tau)\,y_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Phi^T(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0)\,C^T(\tau)\,y_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ .$$

Per confronto con la (52), nell'ipotesi che il sistema sia completamente osservabile (matrice $Q(t_0, t_1)$ invertibile) si deduce lo stato iniziale

$$x_0 = Q^{-1}(t_0, t_1)\,\Psi(t_0, t_1)\,p(t_1)\ . \tag{54}$$

L'osservazione o la ricostruzione dello stato si possono realizzare utilizzando innanzitutto un dispositivo in linea costituito da un modello del sistema (1) il cui stato iniziale sia lo stato zero.

Si determina così la risposta forzata $y_1(\cdot)$, che, sottratta all'uscita, fornisce la risposta libera $y_0(\cdot)$, che, a sua volta, costituisce l'ingresso del sistema aggiunto (53), la cui soluzione con condizione iniziale nulla fornisce il valore $p(t_1)$ da utilizzare nella (54) per determinare lo stato iniziale. Lo stato finale è poi dato dall'espressione

$$x_1 = \Phi(t_1, t_0)\, Q^{-1}(t_0, t_1)\, \Psi(t_0, t_1)\, p(t_1) + \varphi(t_1, t_0, 0, u(\cdot))$$

ove $\varphi(t_1, t_0, 0, u(\cdot))$ è il valore finale del moto forzato.

Sistemi a tempo discreto

Per il sistema discreto (18) si ottengono, in maniera del tutto analoga, i seguenti risultati:

$$\mathcal{E}^-(\,j, i, 0, 0) = \ker Q(\,j, i\,) \tag{55}$$

$$\mathcal{E}^+(\,j, i, 0, 0) = \Phi(i, j\,) \ker Q(\,j, i\,) \tag{56}$$

in cui $Q(\,j, i\,)$ è la matrice simmetrica semidefinita positiva

$$Q(\,j, i\,) = \sum_{k=j}^{i} \Phi^T(k, j\,)\, C_d^T(k)\, C_d(k)\, \Phi(k, j\,)\,. \tag{57}$$

Il problema della determinazione dello stato iniziale x_0 (o della sua proiezione sul complemento ortogonale di $\mathcal{E}^-(\,j, i, 0, 0)$ se il sistema non è completamente osservabile), date le funzioni $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ in $[\,j, i\,]$, si risolve impiegando le relazioni

$$y_0(k) = y(k) - C_d(k) \sum_{h=j}^{k-1} \Phi(k, h+1)\, B_d(h)\, u(h) - D_d(k)\, u(k), \;\; k \in [j, i] \tag{58}$$

$$x_0 = Q^+(\,j, i\,) \sum_{k=j}^{i} \Phi^T(k, j\,)\, C_d^T(k)\, y_0(k)\;. \tag{59}$$

3.6 Stabilità

La linearità comporta notevoli conseguenze anche in relazione alla stabilità. Valgono infatti, per i sistemi lineari, le seguenti proprietà:

Proprietà – Se un moto di un sistema lineare Σ è stabile (asintoticamente stabile) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, anche qualunque altro moto di Σ lo è.

Dimostrazione: A causa della linearità della φ, nelle (6) e (7) è

$$\|\delta x_1(t)\| = \|\varphi\big(t, t_0, \delta x_1(t_0), 0\big)\|, \tag{60}$$

funzione del tempo indipendente da $\bar{x}(\cdot)$ e $\bar{u}(\cdot)$.

Proprietà – Se un moto di un sistema lineare Σ è stabile rispetto a perturbazioni dell'ingresso, anche qualunque altro moto di Σ lo è.

Dimostrazione: A causa della linearità della φ, nella (8) è

$$\|\delta x_2(t)\| = \|\varphi\big(t, t_0, 0, \delta u(\cdot)\big)\|, \tag{61}$$

funzione del tempo indipendente da $\bar{x}(\cdot)$ e $\bar{u}(\cdot)$.

Nel caso dei sistemi lineari si può pertanto parlare di stabilità *del sistema* anziché di stabilità di un particolare moto.

Proprietà – Se un sistema lineare Σ è stabile rispetto a (piccole) perturbazioni dello stato iniziale e dell'ingresso, esso è stabile per variazioni dello stato iniziale e dell'ingresso di qualunque valore finito.

Dimostrazione: Essendo i secondi membri delle (60, 61) lineari rispetto a $\delta x_1(t_0)$ e $\delta u(\cdot)$, le condizioni $\|\delta x_1(t_0)\| < \alpha\eta$ e $\|\delta u(\cdot)\| < \alpha\eta$, con α reale positivo arbitrario implicano le relazioni $\|\delta x_1(t)\| < \alpha\epsilon$, $\|\delta x_2(t)\| < \alpha\epsilon$, $t \geq t_0$.

Nel caso dei sistemi lineari è pertanto sufficiente che un moto qualunque sia asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale per poter affermare che *il sistema* è globalmente asintoticamente stabile. Poiché la stabilità nel caso dei sistemi lineari non dipende dal particolare stato di equilibrio o dal particolare moto cui ci si riferisce, conviene, per semplicità, riferirsi sempre allo stato zero, che è di equilibrio. Le definizioni di stabilità possono essere riformulate, per i sistemi lineari , come segue

Definizione – Il sistema lineare (1) è *stabile* per $t \geq t_0$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che

$$\|x(t_0)\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon \ \forall\, t \geq t_0 \ , \tag{62}$$

asintoticamente stabile se, oltre alla (62), vale la condizione

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0 \ .$$

La stabilità del sistema (1) può poi essere espressa in termini di proprietà della matrice di transizione; valgono al riguardo i seguenti teoremi.

Teorema – Il sistema lineare (1) è stabile per $t \geq t_0$ se e solo se esiste un numero reale M tale che sia

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M < \infty \quad \forall\, t \geq t_0 \,. \tag{63}$$

Dimostrazione – Sufficienza: dalla relazione

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0)$$

si ricava, per le norme,

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\|\, \|x(t_0)\| \leq M\, \|x(t_0)\| \;;$$

qualora si scelga $\eta = \epsilon / M$, si deduce che $\|x(t)\| < \epsilon$, $t \geq t_0$, se è $\|x(t_0)\| < \eta$.

Necessità: se la (62) in un istante t_1 non è soddisfatta per alcun valore di M, dato che qualunque norma di matrice soddisfa la condizione

$$\|A\| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;,$$

esiste almeno un elemento $\varphi_{ij}(t_1, t_0)$ di $\Phi(t_1, t_0)$ non limitato in modulo.

Assumendo uno stato iniziale $x(t_0)$ con la j–esima componente uguale ad η e le altre nulle, si ottiene un $x(t_1)$ con la i–esima componente non limitata, cioè un $x(t_1)$ non limitato in norma qualunque sia il valore di η. Il sistema non risulta quindi stabile.

Teorema – Il sistema (1) è asintoticamente stabile per $t \geq t_0$ se e solo se è soddisfatta la (62) e, inoltre,

$$\lim_{t \to \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0 \ . \tag{64}$$

Dimostrazione – Sufficienza: sia $\eta = \|x(t_0)\|$. Essendo

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \, \|x(t_0)\| = \|\Phi(t, t_0)\| \, \eta \ , \tag{65}$$

se vale la (64) l'origine del sistema e quindi il sistema è asintoticamente stabile.
Necessità: poiché per un'opportuna scelta di $x(t_0)$ la (65) vale con il segno di eguaglianza, se non fosse soddisfatta la (64) non potrebbe risultare $\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$ per ogni $x(t_0)$ tale che sia $\|x(t_0)\| > 0$.

Nei sistemi lineari la stabilità rispetto a variazioni dell'ingresso non dipende dal particolare stato di equilibrio o dal particolare moto cui ci si riferisce ed è quindi possibile dare la seguente definizione per la stabilità i.l.s.l.

Stabilità i.l.s.l. – Il sistema (4.1) si dice *stabile rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso* o *stabile ingresso limitato - stato limitato* per $t \geq t_0$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che se è $\|u(t)\| < \eta$, $t \geq t_0$, risulti

$$\|x(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \| < \epsilon \quad \forall\, t \geq t_0\ . \tag{66}$$

Teorema – Il sistema lineare (1) è stabile i.l.s.l. se e solo se

$$\int_{t_0}^{t} \|V(t,\tau)\|\, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)\, B(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \leq M < \infty \quad \forall\, t \geq t_0\ . \tag{67}$$

Dimostrazione – Sufficienza: è

$$\|x(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \| \leq \int_{t_0}^{t} \|V(t,\tau)\|\, \|u(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau\ ,$$

ed essendo $\|u(t)\| \leq \eta$, $t \geq t_0$, si ottiene $\|x(t)\| \leq M\eta$, $t \geq t_0$. Basta pertanto assumere $\eta = \epsilon/M$ perché valga la (66).

Necessità: se la (67) non è soddisfatta, cioè se esiste un valore t_1 del tempo tale che l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \|V(t_1, \tau)\| \, \mathrm{d}\tau$$

non sia limitato, per almeno una coppia di indici i, j l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} |v_{ij}(t_1, \tau)| \, \mathrm{d}\tau$$

non è limitato. Infatti è

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \|V(t_1, \tau)\| \, \mathrm{d}\tau &\leq \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{p} |v_{rs}(t_1, \tau)| \, \mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{p} \int_{t_0}^{t_1} |v_{rs}(t_1, \tau)| \, \mathrm{d}\tau \ \leq n\, p \sup_{r,s} \int_{t_0}^{t_1} |v_{rs}(t_1, \tau)| \, \mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Si assuma la funzione di ingresso $u(t)$ con la j–esima componente definita dalla relazione

$$u_j(t) = \eta \,\mathrm{sign}\,(v_{ij}(t_1, t))$$

e le altre componenti identicamente nulle. Essendo

$$x_i(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_{ij}(t_1, \tau)\, u_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \eta \int_{t_0}^{t_1} |v_{ij}(t_1, \tau)|\, \mathrm{d}\tau \ ,$$

per tale funzione di ingresso la i–esima componente di $x(t_1)$ non è limitata, cioè $x(t_1)$ non è limitato in norma qualunque sia il valore di η e quindi il sistema non è stabile i.l.s.l.

Stabilità i.l.u.l. – Il sistema (1) si dice *stabile ingresso limitato - uscita limitata* per $t \geq t_0$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che se $\|u(t)\| < \eta$, $t \geq t_0$, risulti

$$\|y(t)\| = \|C(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \, + \, D(t)\, u(t)\| < \epsilon \quad \forall\, t \geq t_0 \ . \tag{68}$$

Teorema – Il sistema lineare (1) è stabile i.l.u.l. per $t \geq t_0$ se e solo se

$$\int_{t_0}^{t} \|W(t, \tau)\|\, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \|C(t)\, \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \leq M < \infty \ . \tag{69}$$

Si può usare per la dimostrazione un procedimento del tutto analogo a quello impiegato per il Teorema precedente, salvo che occorre considerare anche l'eventuale azione diretta sul controllo tramite la matrice $D(t)$. Ciò non comporta alcun problema, in quanto tale matrice viene supposta limitata in norma per ogni t.

I risultati precedenti, che fanno riferimento a sistemi lineari non stazionari continui del tipo (1), possono essere estesi ai sistemi discreti del tipo (18) senza variazioni di rilievo.