

Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi

I Sistemi Lineari Stazionari

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica

Università di Bologna

Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna



Avvertenza: Vari contenuti di queste *slide*, che vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte, sono tratti dai seguenti testi ai quali si rimanda per una trattazione completa della materia:



Giovanni Marro - Teoria dei Sistemi e del Controllo, Zanichelli, Bologna.
Indice ed errata corregge: <http://sting.deis.unibo.it/tds/Corso/Testi/Testi.htm>



Giovanni Marro - Teoria dei sistemi: Fondamenti, Patron, Bologna.
(Il testo è fuori stampa ma è disponibile nella biblioteca Dore della Facoltà di Ingegneria)



4.1 Evoluzione dello stato nei sistemi continui

Si consideri il modello differenziale di un sistema lineare, stazionario e continuo

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (2)$$

ove $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^p$, $y \in \mathcal{R}^q$ e A, B, C, D sono matrici reali. Si assumerà sempre, per tali sistemi $t_0 = 0$. Facendo inizialmente riferimento alla equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad (3)$$

che descrive un sistema libero, si ottiene il moto corrispondente allo stato iniziale x_0 dato da

$$x(t) = \Phi(t, 0) x_0 \quad (4)$$

ove la matrice di transizione $\Phi(t, 0)$ può essere dedotta dalla successione di Peano–Baker

$$\Phi_0(t, 0) = I, \quad \dots, \quad \Phi_i(t, 0) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \dots + \frac{A^i t^i}{i!} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (5)$$



In base alla definizione di funzione di matrice segue

$$\Phi(t, 0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(t, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = e^{At} . \quad (6)$$

La matrice di transizione dello stato di un sistema stazionario è quindi l'*esponenziale di matrice*. Analogamente al caso scalare, l'esponenziale di matrice è soluzione dell'equazione differenziale matriciale omogenea

$$\dot{X}(t) = A X(t) \quad (7)$$

con la condizione iniziale $X(0) = I$ e soddisfa la condizione

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau} , \quad (8)$$

che è conseguenza immediata della proprietà di composizione della matrice di transizione.

In base a quanto già dimostrato per i sistemi lineari non stazionari, l'espressione del moto del sistema (1-2) è data da

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (9)$$



mentre la risposta è

$$y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) . \quad (10)$$

Per i sistemi puramente dinamici ($D = 0$) la risposta impulsiva (per un impulso applicato in $t_0 = 0$) è

$$W(t) = C e^{At} B ; \quad (11)$$

si osservi come la i -esima colonna della $W(t)$ non sia altro che la risposta libera del sistema a partire da uno stato iniziale x_0 coincidente con la i -esima colonna della matrice di distribuzione degli ingressi B .

Calcolo dell'esponenziale di matrice

Quanto esposto evidenzia come il calcolo del moto o della risposta di un sistema lineare stazionario richieda il calcolo dell'esponenziale della matrice dinamica del sistema. Tale calcolo può venire effettuato utilizzando i metodi che seguono.



1) *Sviluppo in serie di potenze* – Il modo più semplice per calcolare l'esponenziale di matrice è di usare l'espressione che ne definisce lo sviluppo in serie

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} . \quad (12)$$

Si dimostra come la serie a secondo membro della (12) converga per ogni t finito ad una matrice di norma finita. Sia infatti $m = \|A\|$; poiché $\|A^i\| \leq m^i$ per ogni i intero, segue

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A^i\| |t^i|}{i!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^i |t^i|}{i!} = e^{m|t|} .$$

Quindi la (12) può essere impiegata a scopo computazionale; tuttavia essa comporta un errore di troncamento che risulta fortemente legato alle proprietà della matrice A .

2) *Impiego della forma di Jordan* – Si indichi con J la forma di Jordan di A ; dalla

$$J = T^{-1} A T ,$$

segue

$$J^i = T^{-1} A^i T \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad i \geq 0 ,$$



quindi

$$e^{Jt} = T^{-1} e^{At} T \quad \text{e} \quad e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} . \quad (13)$$

La struttura dell'esponenziale della forma di Jordan di una matrice è, d'altronde, nota risultando

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_{11}t} & \dots & O & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & e^{J_{1,k_1}t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & \dots & e^{J_{h,k_h}t} \end{bmatrix} ,$$

ove l'esponenziale di un singolo blocco di Jordan $\ell \times \ell$ è dato da

$$e^{J_{ij}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} .$$



3) *Metodo del polinomio interpolante* – Usando il metodo del polinomio interpolante, l'elemento generico dell'esponenziale di matrice si può esprimere nella forma

$$(e^{At})_{ij} = \langle k_{ij}(A), v \rangle, \quad (14)$$

dove sia $k_{ij}(A)$ sia v appartengono a \mathcal{C}^m essendo m il grado del polinomio minimo di A . Il vettore v è del tipo

$$v = (e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_h t}, t e^{\lambda_h t}, \dots, t^{m_h-1} e^{\lambda_h t}). \quad (15)$$

I procedimenti esaminati pongono in evidenza un'importante proprietà: tutti gli elementi dell'esponenziale di matrice e^{At} sono combinazioni lineari con coefficienti complessi costanti delle funzioni del tempo che appaiono come componenti del vettore v nella (15). Queste funzioni sono dette *modi* del sistema (1–2).

L'andamento nel tempo dei modi del tipo $e^{\lambda t}$ con λ reale positivo, negativo e nullo pone in evidenza andamenti crescenti, decrescenti e costanti per $t \rightarrow \infty$; i modi espressi da $t^r e^{\lambda t}$, con λ reale positivo, negativo e nullo, mostrano andamenti crescenti e decrescenti per $t \rightarrow \infty$.

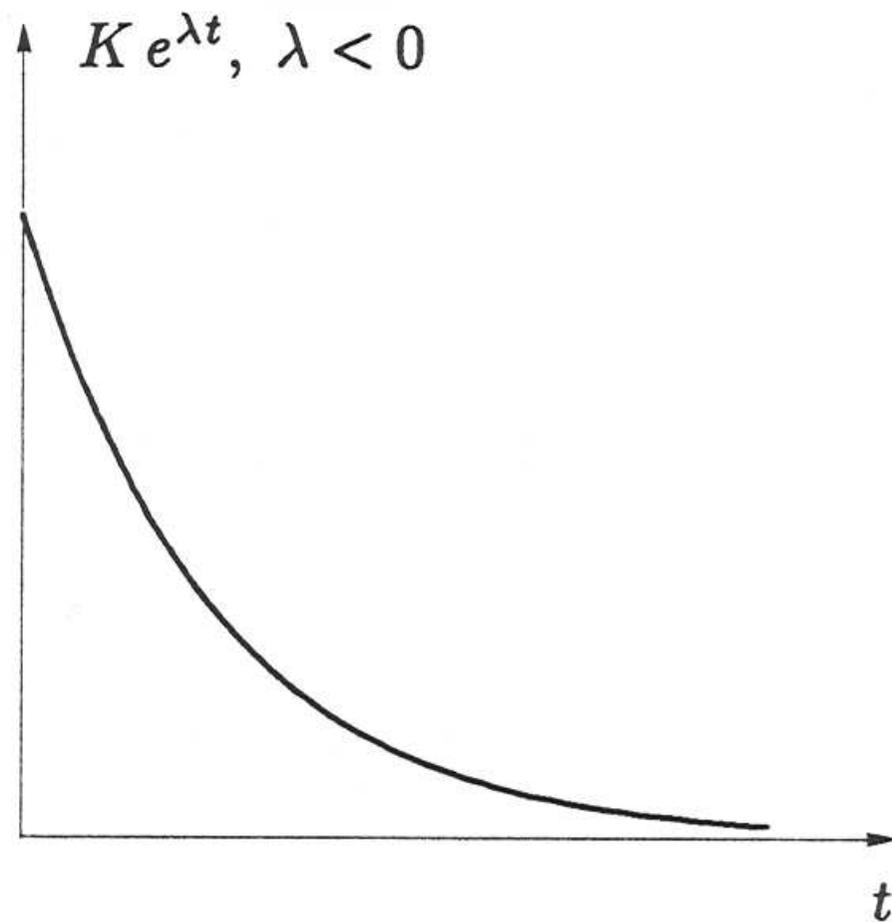
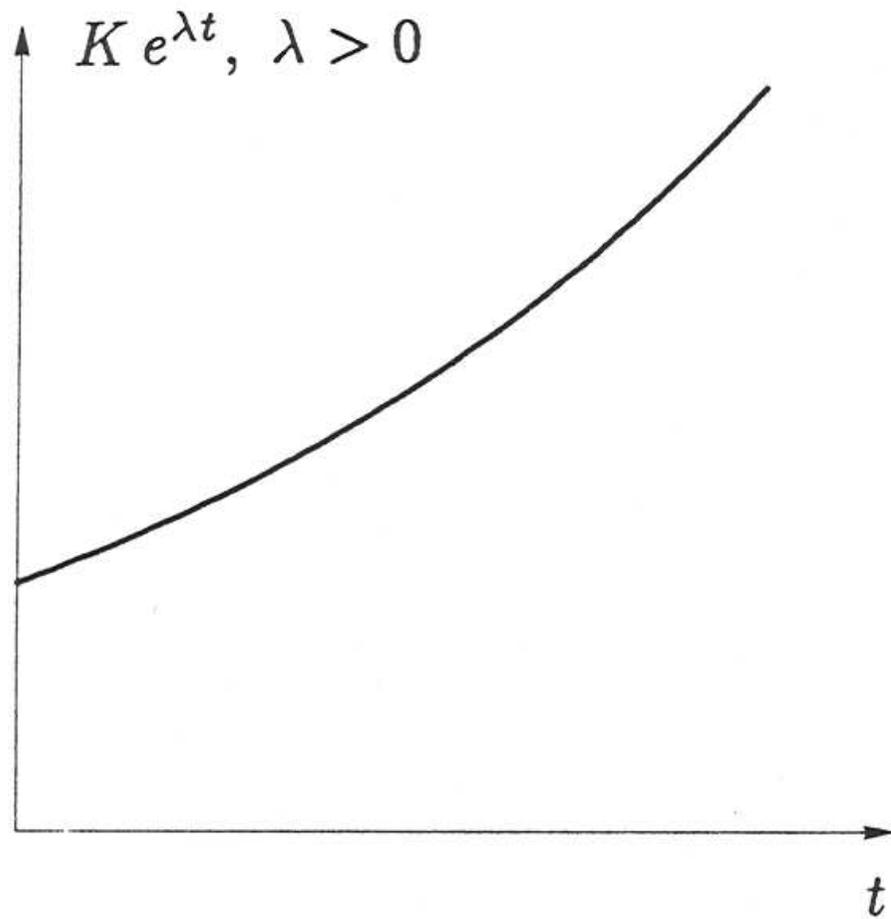


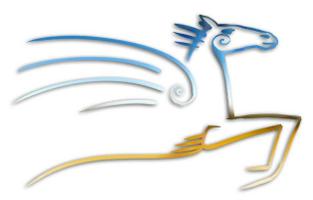
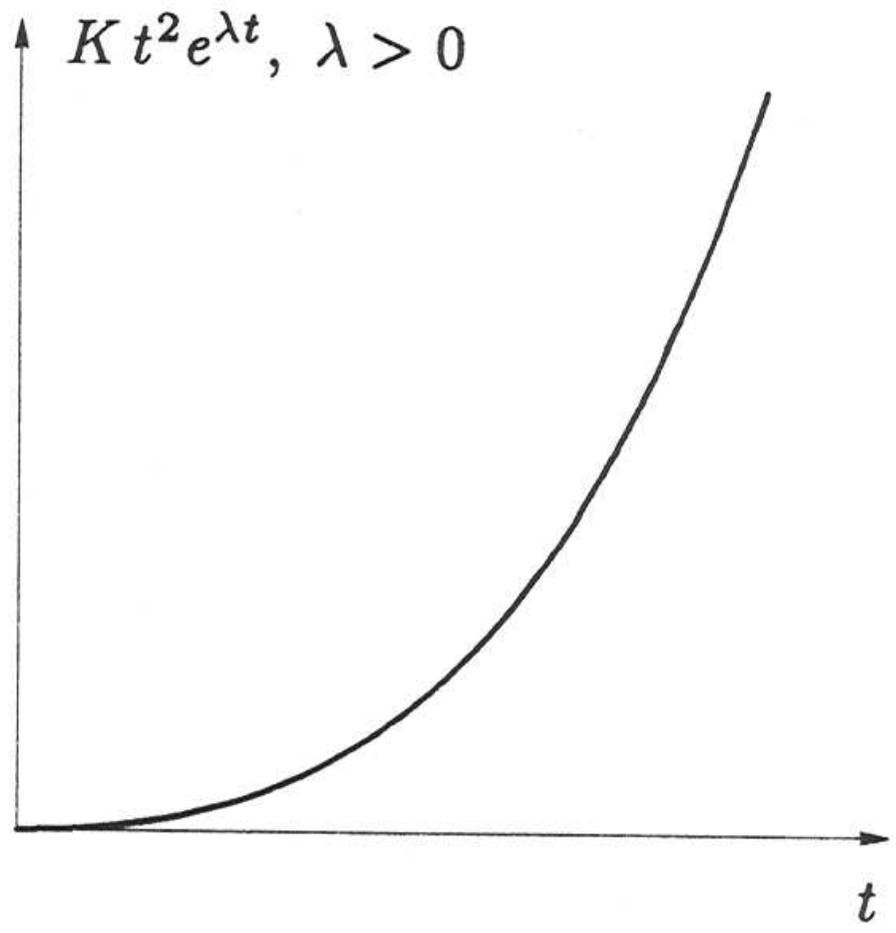
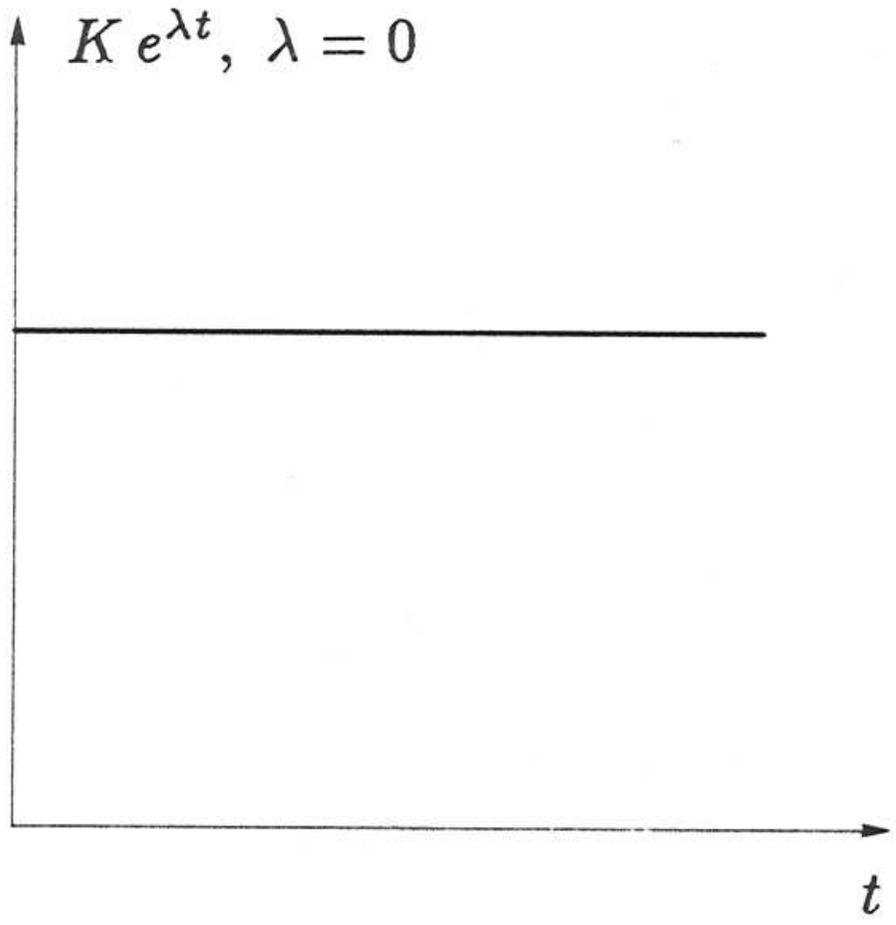
Se A è reale è conveniente sommare i modi corrispondenti a coppie di autovalori complessi coniugati che sono combinati linearmente con coefficienti complessi coniugati in ogni elemento dell'esponenziale di matrice che risulta pertanto reale. I modi possono essere classificati, per $t \rightarrow \infty$, come segue:

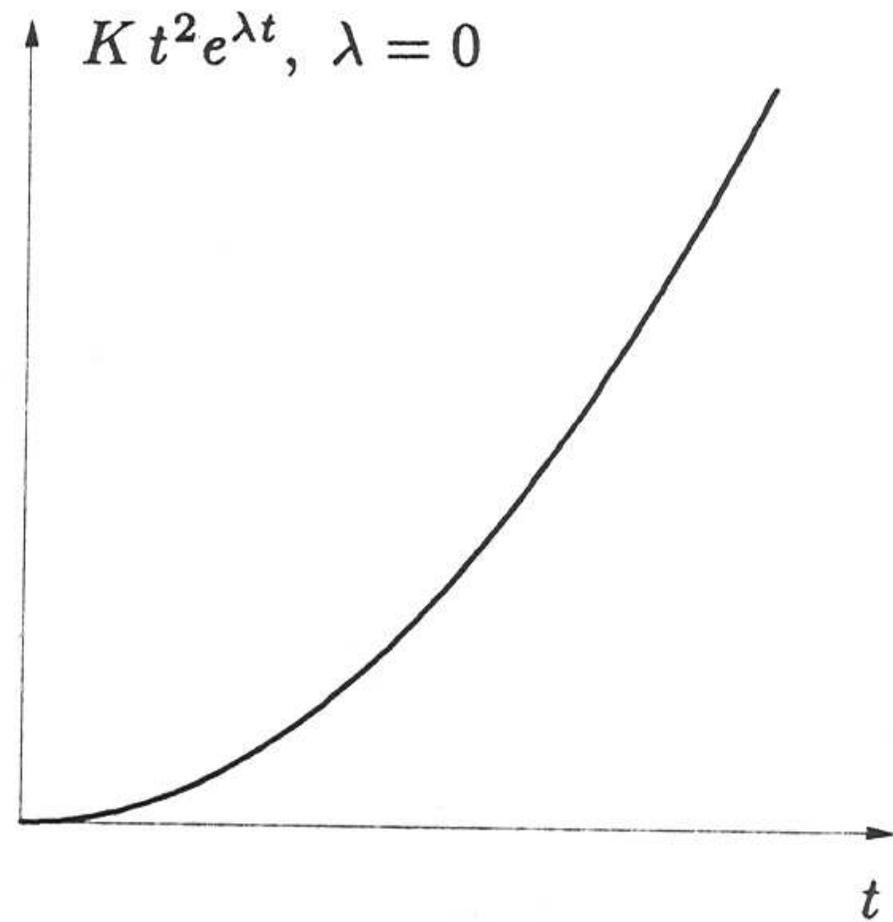
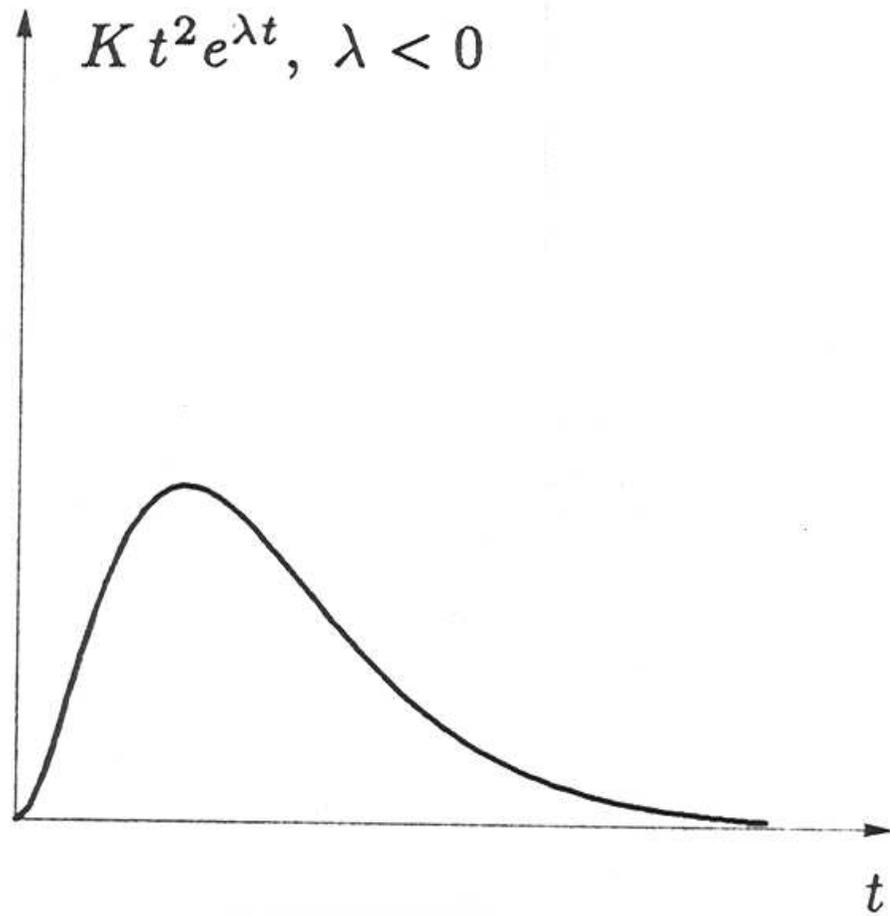
- 1) tendono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del corrispondente autovalore è negativa;
- 2) restano limitati per t tendente all'infinito se i corrispondenti autovalori hanno parte reale nulla e sono zeri semplici del polinomio minimo;
- 3) divergono per t tendente all'infinito se la parte reale del corrispondente autovalore è positiva o, nel caso l'autovalore sia zero multiplo del polinomio minimo, nulla.

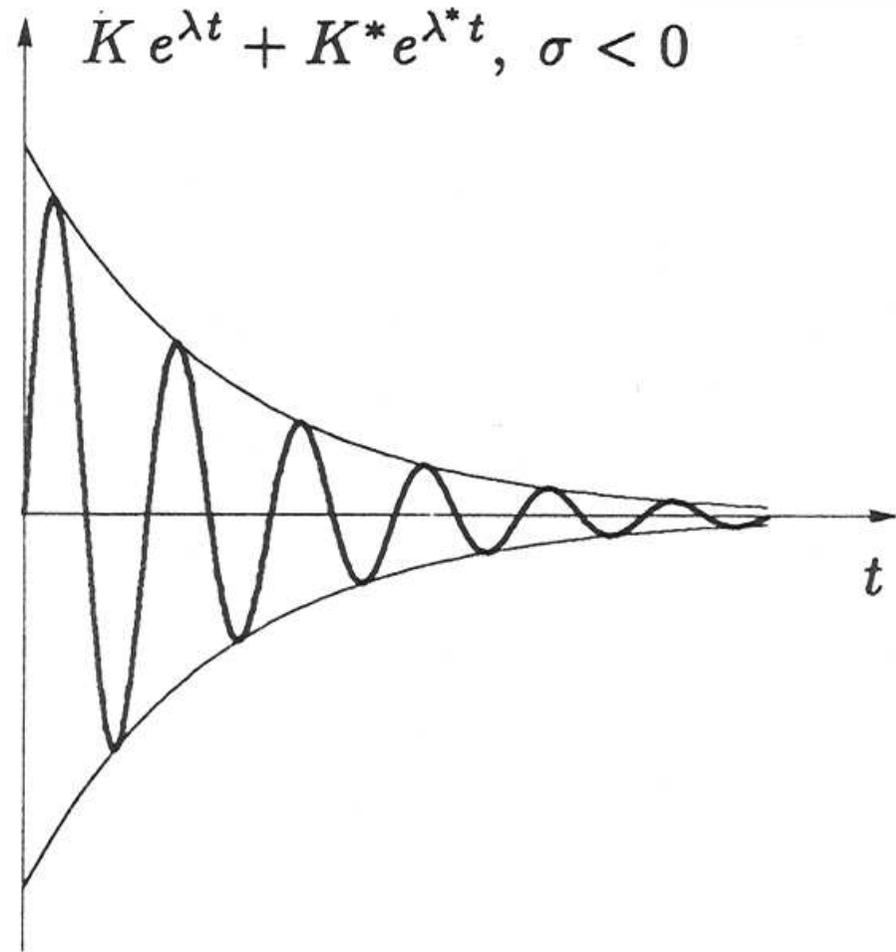
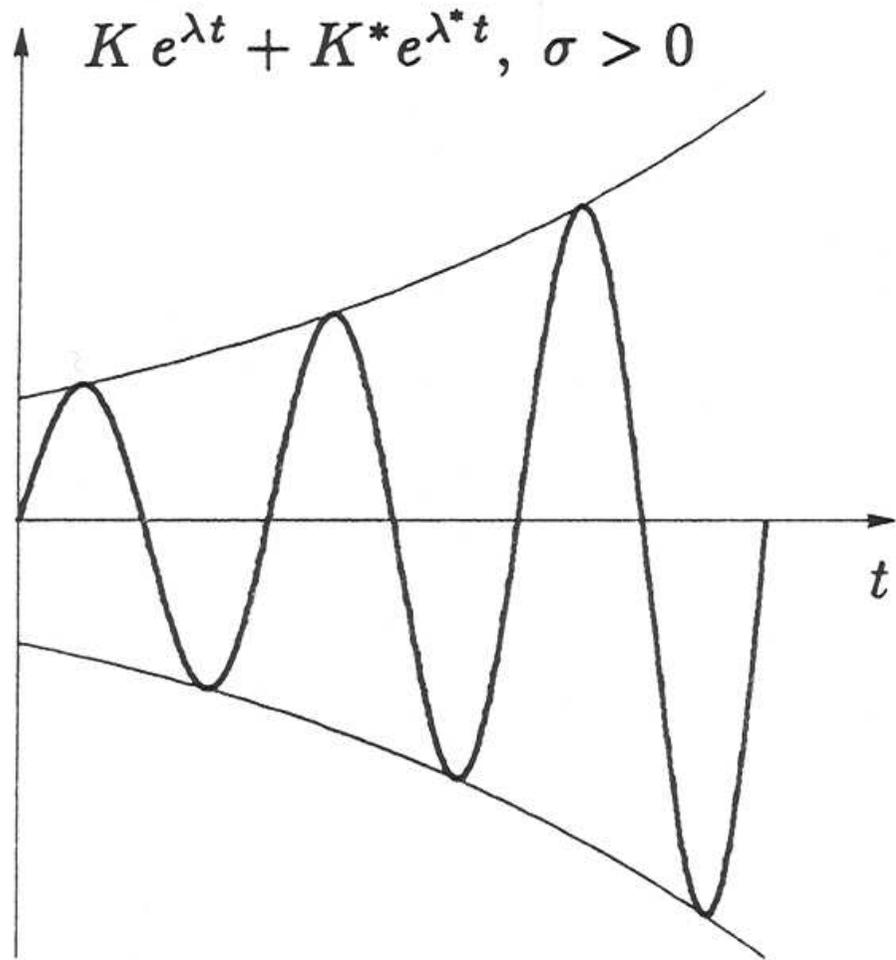
I modi corrispondenti ai tre comportamenti elencati si dicono rispettivamente *asintoticamente stabili*, *(semplicemente) stabili* ed *instabili*.

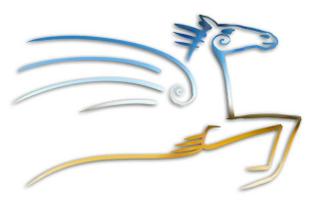
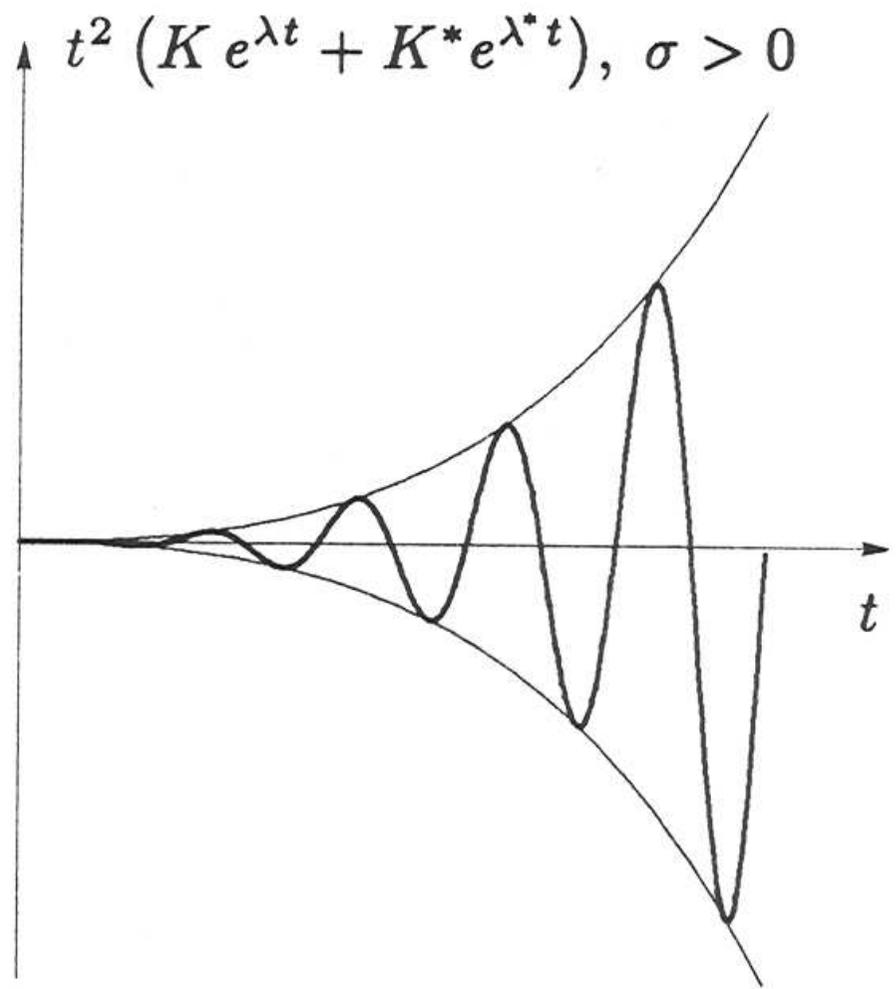
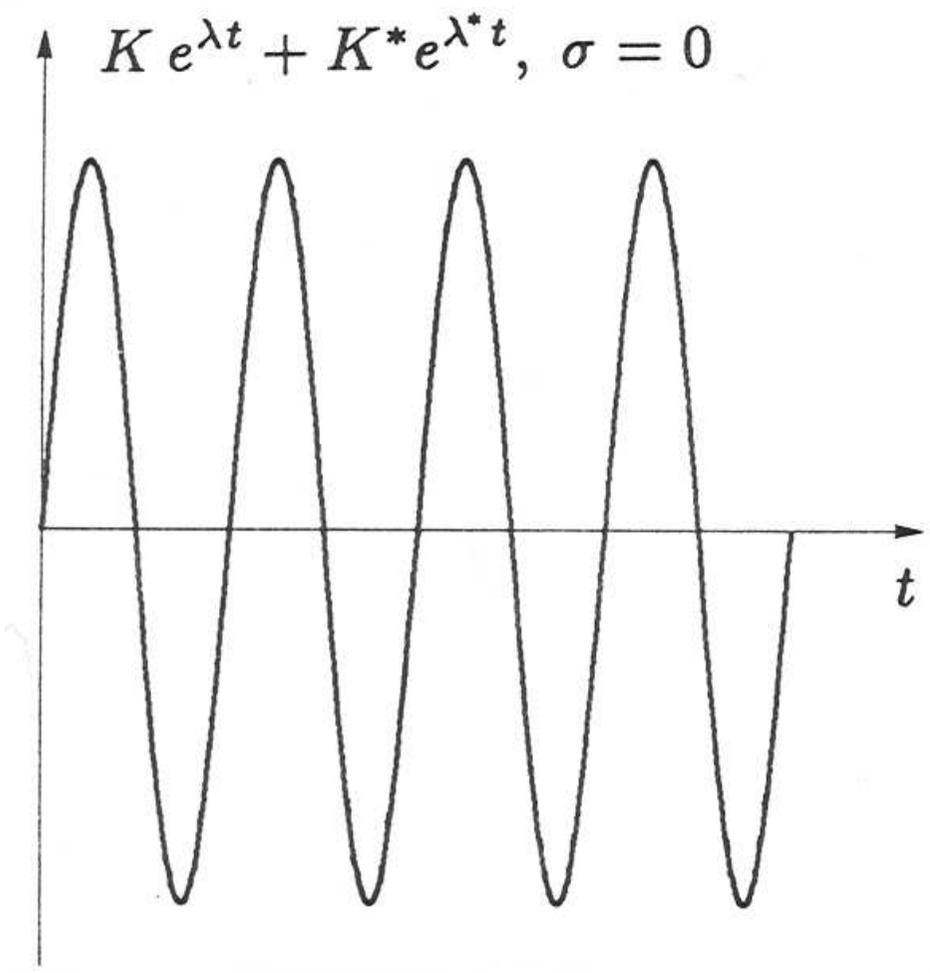




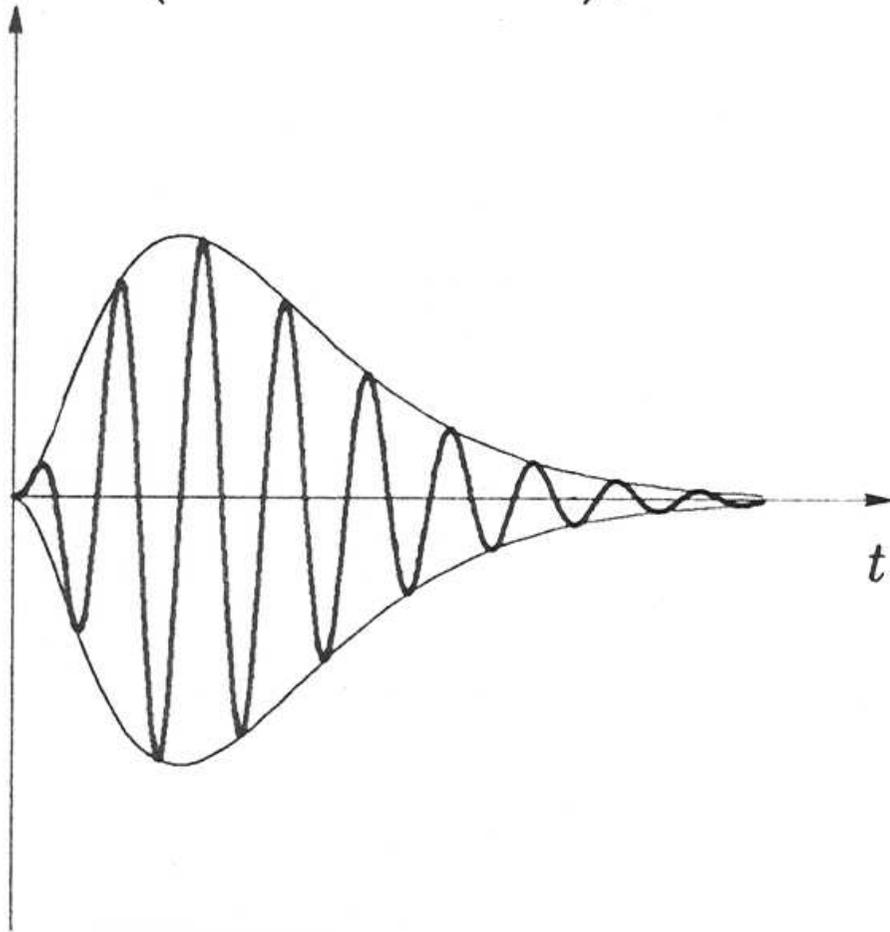




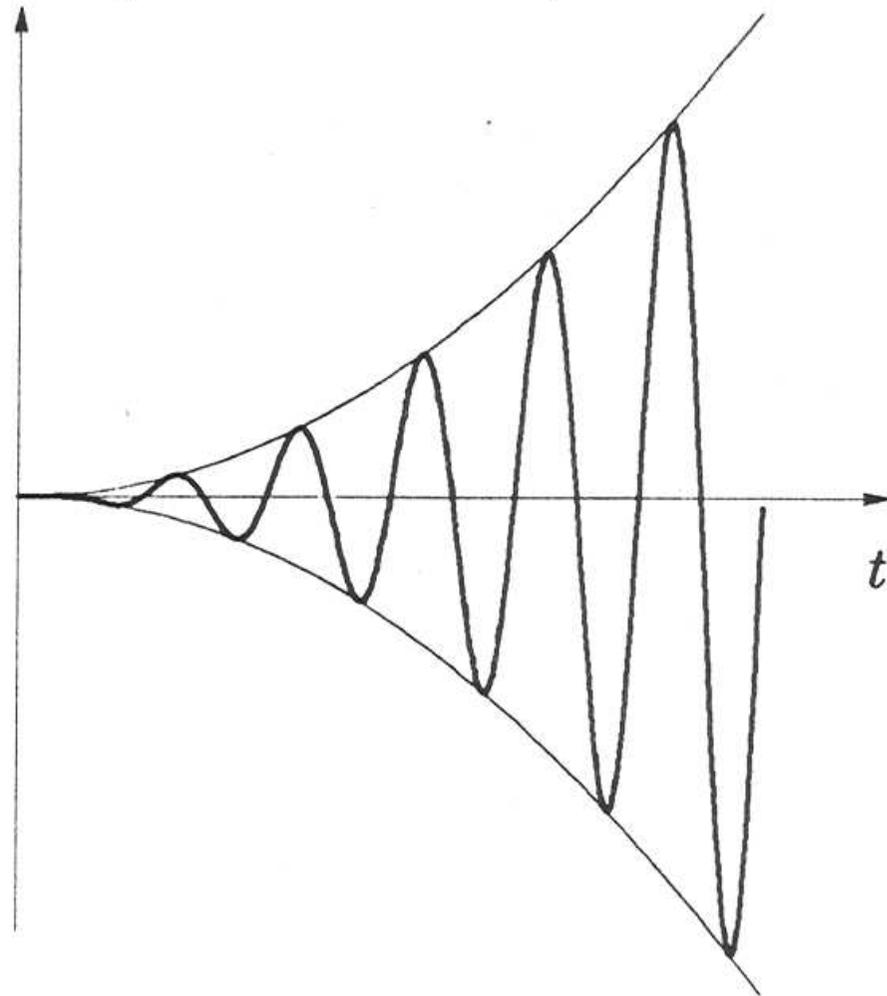




$$t^2 (K e^{\lambda t} + K^* e^{\lambda^* t}), \sigma < 0$$



$$t^2 (K e^{\lambda t} + K^* e^{\lambda^* t}), \sigma = 0$$



4.1 Evoluzione dello stato nei sistemi discreti

I modelli alle differenze di tali sistemi sono del tipo

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad (16)$$

$$y(k) = C_d x(k) + B_d u(k) . \quad (17)$$

Il sistema libero

$$x(k+1) = A_d x(k) , \quad (18)$$

ha la matrice di transizione dello stato

$$\Phi(i, 0) = A_d^i , \quad (19)$$

che si riduce cioè alla *potenza di matrice*; il moto del sistema (16–17) è dato da

$$x(k) = A_d^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-i-1} B_d u(i) \quad (20)$$

mentre la funzione di risposta è

$$y(k) = C_d A_d^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} C_d A_d^{k-i-1} B_d u(i) + D_d u(k) . \quad (21)$$



La matrice di risposta impulsiva per i sistemi puramente dinamici ($D_d = 0$) è data da

$$W(k) = C_d A_d^{k-1} B_d . \quad (22)$$

I procedimenti per il calcolo della matrice di transizione precedentemente esposti per i sistemi continui possono essere impiegati anche per i sistemi discreti.

1) *Metodo diretto* – Ripetere molte volte la moltiplicazione di matrici può comportare errori significativi dovuti al troncamento e un alto tempo di calcolo, per cui il metodo diretto può risultare meno conveniente degli altri. Può essere tuttavia utilmente impiegato il metodo detto delle potenze binarie che consiste nello scomporre l'esponente cui occorre elevare A_d in potenze di 2 e nel moltiplicare tra loro tali potenze che possono essere facilmente ottenute attraverso un numero limitato di operazioni. Così, ad esempio, A_d^{2037} può essere ottenuta attraverso l'espressione $A_d \cdot A_d^4 \cdot A_d^{16} \cdot A_d^{32} \cdot A_d^{64} \cdot A_d^{128} \cdot A_d^{256} \cdot A_d^{512} \cdot A_d^{1024}$ che richiede, 18 moltiplicazioni tra matrici anziché le 2036 del metodo diretto.

2) *Impiego della forma di Jordan* – Dalla

$$J = T^{-1} A_d T ,$$

segue

$$J^k = T^{-1} A_d^k T , \quad \text{quindi} \quad A_d^k = T J^k T^{-1} .$$



Segue che

$$J^k = \begin{bmatrix} J_{11}^k & \dots & O & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & J_{1,k_1}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & \dots & J_{h,k_h}^k \end{bmatrix},$$

mentre la k -esima potenza di un singolo blocco di Jordan $\ell \times \ell$ ha una struttura data da

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k \lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{\ell-1} \lambda_i^{k-\ell+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \dots & \binom{k}{\ell-2} \lambda_i^{k-\ell+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k \end{bmatrix},$$

ove

$$\binom{k}{h} = \frac{k(k-1)\dots(k-h+1)}{h!} \text{ per } k > h, \quad 1 \text{ per } k = h, \quad 1 \text{ per } h = 0, \quad 0 \text{ per } k < h.$$



3) *Metodo del polinomio interpolante* – Con il metodo del polinomio interpolante si ottiene l'elemento generico della k -esima potenza della matrice A_d nella forma

$$(A_d^k)_{ij} = \langle k_{ij}(A_d), v \rangle, \quad (23)$$

dove sia $k_{ij}(A_d)$ sia v appartengono a \mathcal{C}^m essendo m il grado del polinomio minimo di A_d . Il vettore v è dato da

$$v = \left(\lambda_1^k, k \lambda_1^{k-1}, \dots, \lambda_h^k, k \lambda_h^{k-1}, \dots, k(k-1) \dots (k-m_h+2) \lambda_h^{k-m_h+1} \right).$$

È necessario considerare $k \geq m$ perché l'espressione precedente abbia significato.

Il modo generico ha uno dei seguenti comportamenti:

1) tende a zero per k tendente all'infinito se il modulo del corrispondente autovalore è minore di uno;

2) resta limitato per k tendente all'infinito se il corrispondente autovalore ha modulo uguale ad uno ed è uno zero semplice del polinomio minimo;



3) diverge per k tendente all'infinito se il modulo del corrispondente autovalore è maggiore di uno o se tale autovalore ha modulo uguale ad uno ed è zero multiplo del polinomio minimo.

I modi corrispondenti ai comportamenti sopra specificati sono detti rispettivamente *asintoticamente stabili*, *(semplicemente) stabili* e *instabili*.

4.3 Passaggio da modelli continui a modelli discreti

Quando il modello a tempo discreto (16–17) descrive il comportamento di un sistema a tempo continuo del tipo (1–2) con una funzione di ingresso soggetta a variazioni solamente negli istanti di tempo $t_0 + kT$ ($k = 0, 1, \dots$) nei quali viene campionato anche il valore dello stato e dell'uscita le matrici A_d , B_d , C_d e D_d sono legate alle matrici A , B , C e D dalle relazioni

$$A_d = e^{AT} \quad (24)$$

$$B_d = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B \, d\tau = \left(\int_0^T e^{A\tau} \, d\tau \right) B = A^{-1}(A_d - I) B \quad (25)$$

$$C_d = C \quad (26)$$

$$D_d = D. \quad (27)$$



La matrice dinamica A_d è, in tale caso, sempre non singolare coincidendo con la matrice di transizione del sistema continuo sull'intervallo di campionamento; la stessa proprietà vale quindi anche per la matrice di transizione $\Phi(k, 0) = A_d^k$.

4.4 Raggiungibilità e controllabilità

Teorema – Per i sistemi lineari stazionari (1) valgono le relazioni

$$\mathcal{W}_{t_1}^+(0) = \mathcal{R}_{t_1}^+(0) \quad (28)$$

$$\mathcal{W}_{t_1}^-(0) = \mathcal{R}_{t_1}^-(0) . \quad (29)$$

Dimostrazione: Sia $x_1 \in \mathcal{R}_{t_1}^+(0)$; esiste quindi un ingresso $u_1(\cdot)$ che controlla lo stato 0 a x_1 al tempo t_1 . Se $t_2 > t_1$ la funzione di ingresso $u_2(\cdot)$ identicamente nulla in $[0, t_2 - t_1]$ e coincidente con $u_1(\cdot)$ per $t > t_2 - t_1$ controlla lo stato iniziale 0 allo stato finale x_1 al tempo t_2 essendo lo stato zero di equilibrio con ingresso nullo. Ne segue che $\mathcal{R}_{t_1}^+(0) \subseteq \mathcal{R}_{t_2}^+(0)$, e questo dimostra la (28). La (29) si dimostra in maniera analoga.



Teorema – Per i sistemi lineari stazionari continui i sottospazi caratteristici relativi alla raggiungibilità ed alla controllabilità sono, per ogni t_1 finito,

$$\mathcal{R}_{t_1}^+(0) = \mathcal{R}^+(0) = \text{im } P \quad (30)$$

$$\mathcal{R}_{t_1}^-(0) = \mathcal{R}^-(0) = \text{im } P \quad (31)$$

ove P è la matrice

$$P = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] . \quad (32)$$

Dimostrazione: Si consideri l'espressione del sottospazio $\mathcal{R}_{t_1}^+(0)$ vista per i sistemi non stazionari ed il Lemma che fornisce la condizione necessaria e sufficiente perché il prodotto $F^T(t)x$ sia identicamente nullo in un intervallo; ogni stato x_1 che soddisfa la relazione

$$x_1 \in \mathcal{R}_{t_1}^+(0)^\perp$$

soddisfa pure la relazione

$$B^T \Phi^T(t_1, \tau) x_1 = 0, \quad \forall \tau \in [0, t_1] \quad (33)$$

e viceversa. La relazione (33) può anche essere scritta, ponendo $t = t_1 - \tau$, nella forma

$$B^T e^{A^T t} x_1 = 0, \quad \forall t \in [0, t_1] . \quad (34)$$



Si osservi ora come la funzione analitica a primo membro della (34) si annulli identicamente in $[0, t_1]$; dovrà quindi annullarsi insieme alle sue derivate in ogni punto dell'intervallo. Se si considera, in particolare, il punto $t = 0$, tale condizione può essere espressa nella forma

$$B^T (A^T)^i x_1 = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1) \quad (35)$$

ove si sono considerate esplicitamente solo le potenze non superiori ad $n - 1$ poiché le (35) assicurano, in base al Teorema di Cayley–Hamilton, la validità di tali condizioni anche per $i \geq n$. Le condizioni (35), d'altronde, possono anche essere scritte nella forma

$$x_1 \in \ker P^T \quad (36)$$

essendo P la matrice (32). Essendo poi $\text{im } P = (\ker P^T)^\perp$ e non comparando il tempo t_1 nell'espressione trovata, si ottiene la (30). Per dimostrare la (31) si osservi innanzitutto che un sottospazio invariante rispetto ad A è invariante anche rispetto alle funzioni di A ; inoltre

$$\mathcal{R}_{t_1}^-(0) = e^{-At_1} \mathcal{R}_{t_1}^+(0) \quad (37)$$

ove il sottospazio $\mathcal{R}_{t_1}^+(0) = \text{im } [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ è, come conseguenza del Teorema di Cayley–Hamilton, invariante rispetto ad A .



Ne segue che

$$\mathcal{R}_{t_1}^-(0) \subseteq \mathcal{R}_{t_1}^+(0); \quad (38)$$

la non singolarità dell'esponenziale di matrice assicura tuttavia la condizione

$$\mathcal{R}_{t_1}^-(0) = \mathcal{R}_{t_1}^+(0) \quad (39)$$

che dimostra la (31).

Proprietà – Il sottospazio $\mathcal{R}^+(0) = \mathcal{R}^-(0)$ del sistema (1) è il più piccolo invariante rispetto ad A contenente im B .

Dimostrazione: Si è già osservato come il sottospazio $\mathcal{R}^+(0) = \mathcal{R}^-(0)$ sia invariante rispetto ad A e tale sottospazio contiene im B . Si osservi poi come ogni altro invariante rispetto ad A contenente im B contenga necessariamente tutte le colonne della matrice P (32) quindi il sottospazio $\mathcal{R}^+(0) = \mathcal{R}^-(0)$, essendo contenuto in ogni altro invariante rispetto ad A contenente im B , è il più piccolo sottospazio che goda di tale proprietà.

Lemma – Sia \mathcal{X}_1 un sottospazio invariante rispetto ad A ($n \times n$); valgono le relazioni

$$\mathcal{X}_1 \supseteq A\mathcal{X}_1 \supseteq A^2\mathcal{X}_1 \supseteq \dots \quad (40)$$

$$\mathcal{X}_1 \subseteq A^{-1}\mathcal{X}_1 \subseteq A^{-2}\mathcal{X}_1 \subseteq \dots \quad (41)$$



ove la notazione $A^{-1}\mathcal{X}_1$ indica l'immagine inversa, nella trasformazione lineare descritta da A , di \mathcal{X}_1 . Il limite della successione (40) è $A^n\mathcal{X}_1$, quello della (41) è $A^{-n}\mathcal{X}_1$.

Per i sistemi lineari stazionari a tempo discreto vale il seguente teorema.

Teorema – Per i sistemi lineari stazionari discreti i sottospazi caratteristici relativi alla raggiungibilità ed alla controllabilità sono

$$\mathcal{R}_i^+(0) = \text{im } P_i \quad (42)$$

$$\mathcal{R}_i^-(0) = \text{im } A_d^{-i} P_i \quad (43)$$

ove P_i è la matrice

$$P_i = [B_d \ A_d B_d \ \dots \ A_d^{i-1} B_d] . \quad (44)$$

Inoltre

$$\mathcal{R}^+(0) = \mathcal{R}_n^+(0) \quad (45)$$

$$\mathcal{R}^-(0) = \mathcal{R}_n^-(0) . \quad (46)$$

Dimostrazione: In base alle proprietà viste per i sistemi lineari discreti non stazionari se

$$x_1 \in \mathcal{R}_i^+(0)^\perp \quad (47)$$

risulta

$$B_d^T (A_d^T)^k x_1 = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, i - 1) \quad (48)$$



cioè

$$x_1 \in \ker P_i^T \quad (49)$$

dalla quale segue immediatamente la (42). La (45) segue poi dalla invarianza rispetto ad A_d di $\mathcal{R}_n^+(0)$. La (43) segue dalla relazione vista per i sistemi non stazionari e dalla (42); la (46) segue infine dalla (43) e dal Lemma visto in precedenza.

Proprietà – Il sottospazio di raggiungibilità dei sistemi discreti, $\mathcal{R}^+(0)$, è, come nei sistemi continui, il più piccolo invariante rispetto ad A_d contenente $\text{im } B_d$; il sottospazio di controllabilità $\mathcal{R}^-(0)$ soddisfa la condizione $\mathcal{R}^-(0) \supseteq \mathcal{R}^+(0)$.

Dimostrazione: La proprietà di $\mathcal{R}^+(0)$ è già stata dimostrata per i sistemi continui; quella di $\mathcal{R}^-(0)$ deriva dalle (43) e (46) per il Lemma visto e l'invarianza rispetto ad A_d di $\mathcal{R}^+(0)$.

4.5 Osservabilità e ricostruibilità

Teorema – I sottospazi caratteristici relativi alla osservabilità ed alla ricostruibilità dei sistemi stazionari continui soddisfano le relazioni

$$\mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0) \supseteq \mathcal{E}_{t_2}^-(0, 0) \quad \text{se } t_1 \leq t_2 \quad (50)$$

$$\mathcal{E}_{t_1}^+(0, 0) \supseteq \mathcal{E}_{t_2}^+(0, 0) \quad \text{se } t_1 \leq t_2 . \quad (51)$$



Dimostrazione: Gli stati appartenenti a $\mathcal{E}_{t_2}^-(0, 0)$ generano una risposta libera nulla in $[0, t_2]$ che contiene $[0, t_1]$; appartengono quindi anche a $\mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0)$. Considerazioni analoghe valgono per la (51).

Si indicheranno nel seguito con $\mathcal{E}^-(0, 0)$ ed $\mathcal{E}^+(0, 0)$ i sottospazi

$$\mathcal{E}^-(0, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_t^-(0, 0) \quad (52)$$

$$\mathcal{E}^+(0, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_t^+(0, 0) . \quad (53)$$

Teorema – I sottospazi di non osservabilità $\mathcal{E}^-(0, 0)$ e di non ricostruibilità $\mathcal{E}^+(0, 0)$ dei sistemi stazionari continui sono, per ogni t_1 finito,

$$\mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0) = \mathcal{E}^-(0, 0) = \ker Q \quad (54)$$

$$\mathcal{E}_{t_1}^+(0, 0) = \mathcal{E}^+(0, 0) = \ker Q \quad (55)$$

ove la matrice Q^T è data da

$$Q^T = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ A^{T(n-1)} C^T] . \quad (56)$$



Dimostrazione: Utilizzando i risultati visti per i sistemi non stazionari si può osservare come qualunque stato iniziale x_0 che soddisfi la condizione

$$x_0 \in \mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0) \quad (57)$$

soddisfi pure la condizione

$$C \Phi(\tau, 0) x_0 = 0 \quad \forall \tau \in [0, t_1] \quad (58)$$

e viceversa. Con le stesse considerazioni utilizzate nella dimostrazione del Teorema precedente è agevole verificare come la condizione (58) equivalga alla

$$x_0 \in \ker Q \quad (59)$$

che dimostra la (54). La (55) si ottiene osservando che risulta

$$\mathcal{E}_{t_1}^+(0, 0) = e^{At_1} \mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0) \quad (60)$$

e che il sottospazio $\text{im } Q^T$ è invariante rispetto ad A^T ; $\mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0)$ è quindi invariante rispetto ad A e rispetto ad e^{At} e vale la condizione

$$\mathcal{E}_{t_1}^+(0, 0) \subseteq \mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0) . \quad (61)$$



La non singolarità di e^{At} assicura infine la condizione

$$\mathcal{E}_{t_1}^+(0, 0) = \mathcal{E}_{t_1}^-(0, 0) \quad (62)$$

che dimostra la (55).

Corollario – Un sistema lineare stazionario e continuo è in forma minima se e solo se la matrice Q^T (56) è di rango massimo (n).

Proprietà – I sottospazi di non osservabilità $\mathcal{E}^-(0, 0)$ e di non ricostruibilità $\mathcal{E}^+(0, 0)$ dei sistemi stazionari continui coincidono con il massimo sottospazio invariante rispetto ad A contenuto in $\ker C$.

Dimostrazione: Si osservi come $\text{im } Q^T$ sia il più piccolo invariante rispetto ad A^T contenente $\text{im } C^T$. Ne segue l'invarianza rispetto ad A di $\ker Q$ che risulta inoltre contenuto in $\ker C$; essendo poi $\ker Q$ il complemento ortogonale del più piccolo invariante rispetto ad A^T contenente $\text{im } C^T$ è il più grande sottospazio invariante rispetto ad A contenuto in $\ker C$.

Per i sistemi lineari stazionari a tempo discreto vale il seguente teorema.



Teorema – Per i sistemi lineari stazionari discreti i sottospazi caratteristici relativi alla osservabilità ed alla ricostruibilità sono

$$\mathcal{E}_i^-(0, 0) = \ker Q_i \quad (63)$$

$$\mathcal{E}_i^+(0, 0) = A_d^i \ker Q_i \quad (64)$$

ove Q_i^T è la matrice

$$Q_i^T = [C_d^T \ A_d^T C_d^T \ \dots \ (A_d^T)^i C_d^T] . \quad (65)$$

Inoltre

$$\mathcal{E}^-(0, 0) = \mathcal{E}_{n-1}^-(0, 0) \quad (66)$$

$$\mathcal{E}^+(0, 0) = \mathcal{E}_{n-1}^+(0, 0) . \quad (67)$$

Dimostrazione: Facendo riferimento alle relazioni viste per i sistemi non stazionari, se uno stato iniziale x_0 soddisfa la condizione

$$x_0 \in \mathcal{E}_i^-(0, 0) \quad (68)$$

soddisfa anche le condizioni

$$C_d A_d^k x_0 = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, i)$$



e viceversa. Tali condizioni equivalgono alla

$$x_0 \in \ker Q_i$$

dalla quale segue la (63) e, come conseguenza del Teorema di Cayley–Hamilton, la (66). La (64) segue poi dalla (63) mentre la (67) è conseguenza della (64) e del Lemma visto in precedenza.

Proprietà – Il sottospazio di non osservabilità dei sistemi discreti, $\mathcal{E}^-(0, 0)$, è, come nei sistemi continui, il massimo invariante rispetto ad A_d contenuto in $\ker C_d$; il sottospazio di non ricostruibilità $\mathcal{E}^+(0, 0)$ soddisfa la condizione $\mathcal{E}^+(0, 0) \subseteq \mathcal{E}^-(0, 0)$.

Dimostrazione: La proprietà relativa ad $\mathcal{E}^-(0, 0)$ è già stata dimostrata per i sistemi continui; quella relativa ad $\mathcal{E}^+(0, 0)$ è conseguenza della relazione (64) e del Lemma visto in precedenza.



4.6 Cambiamenti di base nello spazio degli stati

Si consideri il sistema (1–2); passando alla base dello spazio degli stati costituita dalle colonne della matrice T ed indicando con z lo stato del sistema rispetto a tale base risulta

$$x = T z . \quad (69)$$

Sostituendo ad x nelle (1) e (2) l'espressione (69) si ottiene, dopo ovvi passaggi, il modello

$$\dot{z}(t) = A' z(t) + B' u(t) \quad (70)$$

$$y(t) = C' z(t) + D' u(t) \quad (71)$$

ove

$$A' = T^{-1} A T, \quad B' = T^{-1} B \quad (72)$$

$$C' = C T, \quad D' = D \quad (73)$$

I modelli (1–2) e (70–71) sono equivalenti in quanto per ogni stato iniziale x_0 del primo esiste uno stato iniziale $z_0 = T^{-1} x_0$ del secondo tale che le risposte $y(\cdot)$ da tali stati siano coincidenti per ogni funzione di ingresso $u(\cdot)$.



4.7 La scomposizione canonica di Kalman

La *scomposizione canonica di Kalman* si ottiene rappresentando un modello nello spazio degli stati rispetto ad una base dello spazio degli stati partizionata in base alle caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità del sistema considerato.

Teorema – Il sistema lineare stazionario (1–2) è equivalente al sistema

$$\dot{z}(t) = A' z(t) + B' u(t) \quad (74)$$

$$y(t) = C' z(t) + D u(t) , \quad (75)$$

in cui $z \in \mathcal{R}^n$ e le matrici A' , B' , C' presentano le strutture

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{14} \\ O & A'_{22} & O & A'_{24} \\ O & O & A'_{33} & A'_{34} \\ O & O & O & A'_{44} \end{bmatrix} , \quad B' = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ O \\ O \end{bmatrix} , \quad (76)$$

$$C' = \begin{bmatrix} O & C'_2 & O & C'_4 \end{bmatrix} . \quad (77)$$



Dimostrazione: Si opera la trasformazione di coordinate $x = T z$, $z = T^{-1} x$, in cui è $T = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4]$ nonsingolare, con $\text{im}T_1 = \mathcal{R}^+(0) \cap \mathcal{E}^-(0, 0)$, $\text{im}[T_1 \ T_2] = \mathcal{R}^+(0)$, $\text{im}[T_1 \ T_3] = \mathcal{E}^-(0, 0)$. La struttura di A' è conseguenza del fatto che $\mathcal{R}^+(0)$ ed $\mathcal{E}^-(0, 0)$ sono invarianti in A , quella di B' del fatto che è $\text{im}B \subseteq \mathcal{R}^+(0)$ e quella di C' del fatto che è $\mathcal{E}^-(0, 0) \subseteq \ker C$.

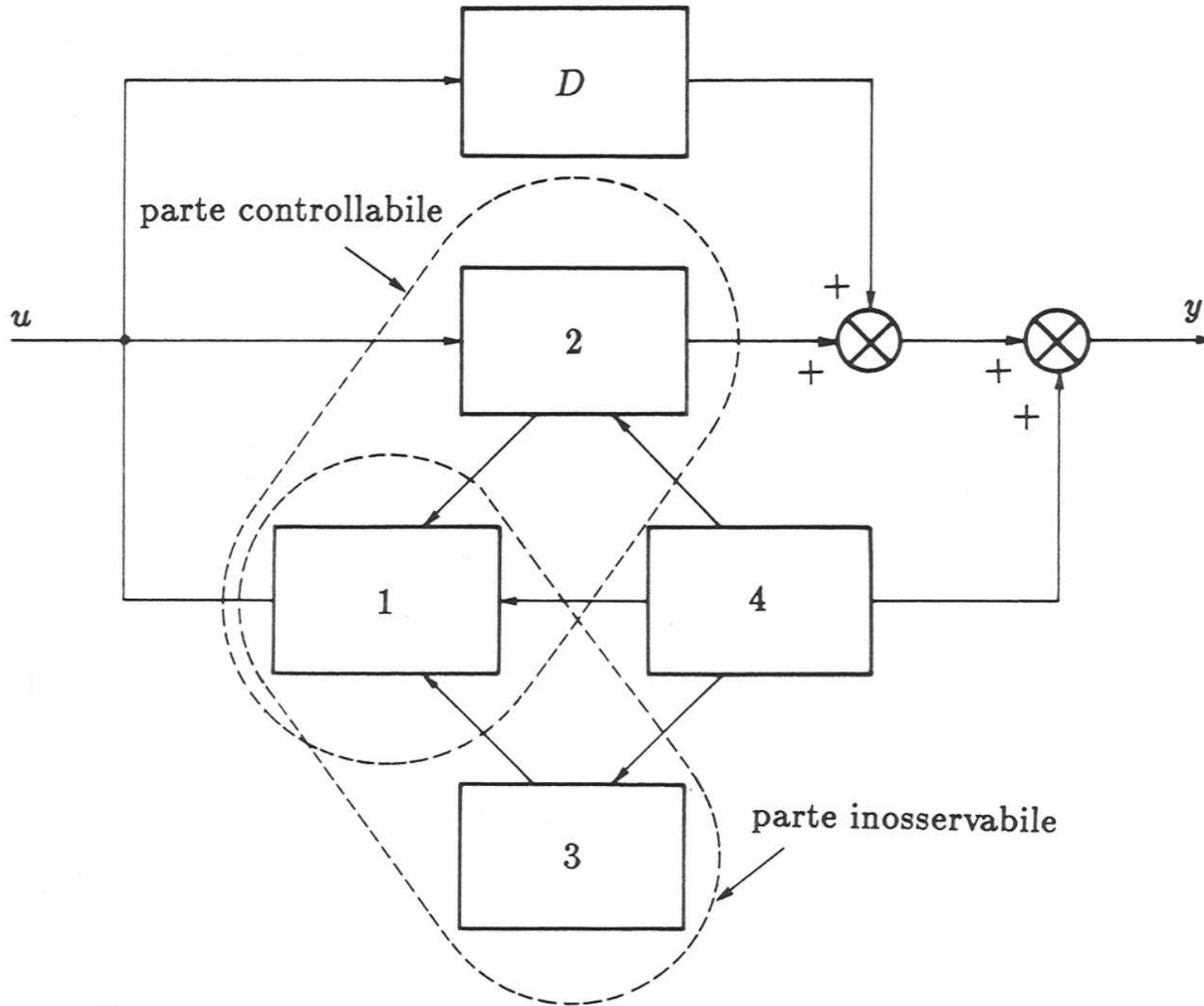
La particolare struttura delle matrici A' , B' , C' consente di scomporre il sistema dato (ridefinendone lo stato) in quattro sottosistemi dinamici interconnessi come in figura.

Gli stati dei sottosistemi 1 e 2 sono raggiungibili, mentre gli stati dei sottosistemi 1 e 3 sono inosservabili dall'uscita y . I sottosistemi 2 e 4 (oltre al legame algebrico D) costituiscono nel loro complesso una forma minima del sistema dato.

Il solo sistema 2 è completamente raggiungibile ed osservabile ed è il solo che, assieme al legame algebrico D , determina il legame ingresso–uscita, cioè la risposta del sistema complessivo con stato iniziale zero. La risposta impulsiva è infatti data da

$$W(t) = C e^{At} B = C' e^{A't} B' = C_2 e^{A_{22}t} B_2 . \quad (78)$$





Scomposizione canonica di Kalman di un sistema dinamico



4.8 Valutazione delle proprietà di raggiungibilità ed osservabilità mediante l'uso della forma di Jordan

Teorema – Il sistema

$$\dot{z}(t) = J z(t) + B' u(t) \quad (79)$$

$$y(t) = C' z(t) + D' u(t) \quad (80)$$

in cui J è in forma di Jordan è completamente raggiungibile se e solo se

- 1) le righe di B' corrispondenti alle righe di J che presentano un solo elemento diverso da zero sono non nulle;
- 2) le righe di B' di cui al punto precedente e corrispondenti a blocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore sono linearmente indipendenti.

Il sistema è completamente osservabile se e solo se

- 1) le colonne di C' corrispondenti alle colonne di J che presentano un solo elemento diverso da zero sono non nulle;
- 2) le colonne di C' di cui al punto precedente e corrispondenti a blocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore sono linearmente indipendenti.



Il Teorema precedente consente di determinare il minimo numero di ingressi e di uscite compatibili, in un sistema, con la completa raggiungibilità ed osservabilità:

Corollario – Il numero minimo di ingressi compatibile con la completa raggiungibilità di un sistema dinamico è pari al massimo numero di blocchi di Jordan associati ad un singolo autovalore della sua matrice dinamica che coincide pure col minimo numero di uscite compatibile con la completa osservabilità del sistema.

4.9 Stabilità dei sistemi lineari stazionari

I risultati ottenuti nello studio della stabilità dei sistemi dinamici lineari non stazionari portano, per i sistemi stazionari, a condizioni più agevoli dal punto di vista computazionale. In relazione alla stabilità dell'equilibrio nello stato zero del sistema (1–2) e quindi alla stabilità di tale sistema vale il seguente teorema.

Teorema – Il sistema (1–2) è stabile se e solo se:

- 1) nessun autovalore di A presenta parte reale positiva;
- 2) gli autovalori di A con parte reale nulla sono zeri semplici del polinomio minimo.



Dimostrazione: Sufficienza: ogni elemento dell'esponenziale di matrice è una combinazione lineare dei modi

$$e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_h t}, t e^{\lambda_h t}, \dots, t^{m_h-1} e^{\lambda_h t} \quad (81)$$

in cui λ_i, m_i ($i = 1, \dots, h$) sono gli autovalori distinti della matrice A ed i relativi ordini di molteplicità come zeri del polinomio minimo. Se valgono le condizioni 1 e 2 tutti i modi sono stabili e risulta

$$\| e^{At} \| \leq M < \infty \quad \forall t \geq 0; \quad (82)$$

tale relazione consente di affermare la stabilità del sistema.

Necessità: si proverà che nessun modo è escluso da tutti gli elementi dell'esponenziale di matrice e, conseguentemente, che la (82) non può essere soddisfatta se non valgono le condizioni 1 e 2. Facendo riferimento al metodo del polinomio interpolante si osservi che risulta

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1} \quad (83)$$

ove tutte le potenze A^i , ($i = 0, 1, \dots, m - 1$) sono non nulle poiché, diversamente, il grado del polinomio minimo sarebbe minore di m .



I coefficienti α_i sono poi legati ai modi da una relazione del tipo

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}. \quad (84)$$

La non singolarità della matrice a secondo membro assicura la presenza dei modi in almeno uno dei coefficienti α_i e quindi in almeno uno degli elementi dell'esponenziale di matrice. Ricordando che la molteplicità di un autovalore come zero del polinomio minimo coincide con la dimensione massima dei blocchi di Jordan associati a tale autovalore e che gli autovalori a parte reale nulla sono associati a modi che restano limitati per $t \rightarrow \infty$ solo se zeri semplici del polinomio minimo, è possibile formulare il seguente corollario.

Corollario – Il sistema (1–2) è stabile se e solo se

- 1) nessun autovalore di A presenta parte reale positiva;
- 2) i blocchi di Jordan relativi ad autovalori con parte reale nulla hanno dimensione unitaria.



Teorema – Il sistema (1–2) è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa.

Dimostrazione: Sufficienza: Ricordando che la norma di qualunque matrice è maggiorata dalla somma dei valori assoluti dei suoi elementi e le proprietà viste in precedenza, è immediato verificare la sufficienza della condizione.

Necessità: poiché si è dimostrato che ogni modo è presente in almeno un elemento della matrice di transizione la presenza di modi non asintoticamente stabili determina elementi della matrice di transizione che non tendono a 0 per $t \rightarrow \infty$; indicando con φ_{ij} uno di tali elementi uno stato iniziale con la j -esima componente diversa da zero darebbe luogo ad un moto libero la cui i -esima componente non tende a 0 per $t \rightarrow \infty$.

Le condizioni per la stabilità i.l.s.l. ed i.l.u.l. del sistema (1–2) sono stabilite dai seguenti teoremi.

Teorema – Il sistema (1–2) è stabile i.l.s.l. se e solo se tutti gli autovalori della sua parte raggiungibile hanno parte reale negativa.



Dimostrazione: Si consideri la condizione vista per i sistemi lineari non stazionari che, per i sistemi stazionari, diventa

$$\int_0^t \| e^{A(t-\tau)} B \| d\tau = \int_0^t \| e^{A\tau} B \| d\tau \leq M < \infty \quad \forall t \geq 0 \quad (85)$$

e si osservi, con riferimento alla scomposizione canonica di Kalman, come risulti, per un opportuno insieme di coefficienti β_i ,

$$\| e^{A'\tau} B' \| = \| e^{A''\tau} B'' \| \leq \sum_{i=1}^{\ell} |\beta_i \mu_i''(\tau)| \quad (86)$$

ove

$$A'' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ O & A'_{22} \end{bmatrix}, \quad B'' = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

e $\mu_i''(\tau)$, ($\tau = 1, \dots, \ell$) sono i modi associati ad A'' cioè ad A'_{11} ed A'_{22} . Con considerazioni analoghe a quelle utilizzate nel caso dei sistemi non stazionari è ora possibile associare la condizione (86) alla stabilità asintotica dei modi di A'' che è verificata se e solo se gli autovalori di A'_{11} e di A'_{22} sono a parte reale negativa.



Facendo sempre riferimento alla scomposizione canonica di Kalman è possibile dimostrare il seguente teorema relativo alla stabilità i.l.u.l.

Teorema – Il sistema (1–2) è stabile i.l.u.l. se e solo se tutti gli autovalori della sua parte raggiungibile ed osservabile hanno parte reale negativa.

I risultati precedenti si estendono facilmente ai sistemi lineari stazionari a tempo discreto per i quali i modi sono funzioni del tipo

$$\begin{aligned} & \lambda_1^k, k \lambda_1^{k-1}, k(k-1) \lambda_1^{k-2} \dots \\ & \vdots \\ & \lambda_h^k, k \lambda_h^{k-1}, k(k-1) \lambda_h^{k-2}, \dots \end{aligned} \quad (88)$$

Le condizioni di stabilità del sistema (16–17) sono descritte dai seguenti teoremi la cui dimostrazione può seguire la falsariga di quelle già viste per i sistemi continui.



Teorema – Il sistema (16–17) è stabile se e solo se

1) nessun autovalore di A_d presenta modulo maggiore di uno;

2) gli autovalori di A_d con modulo unitario sono zeri semplici del polinomio minimo.

Teorema – Il sistema (16–17) è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A_d hanno modulo minore di uno.

Teorema – Il sistema (16–17) è stabile i.l.s.l. se e solo se tutti gli autovalori della sua parte raggiungibile hanno modulo minore di uno.

Teorema – Il sistema (16–17) è stabile i.l.u.l. se e solo se tutti gli autovalori della sua parte raggiungibile ed osservabile hanno modulo minore di uno.

