Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi

I Sistemi Lineari Stazionari – Retroazione, Modelli di Ingresso–Uscita, Realizzazione

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università di Bologna
Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna

Avvertenza: Vari contenuti di queste *slide*, che vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte, sono tratti dai seguenti testi ai quali si rimanda per una trattazione completa della materia:

Giovanni Marro - Teoria dei Sistemi e del Controllo, Zanichelli, Bologna.

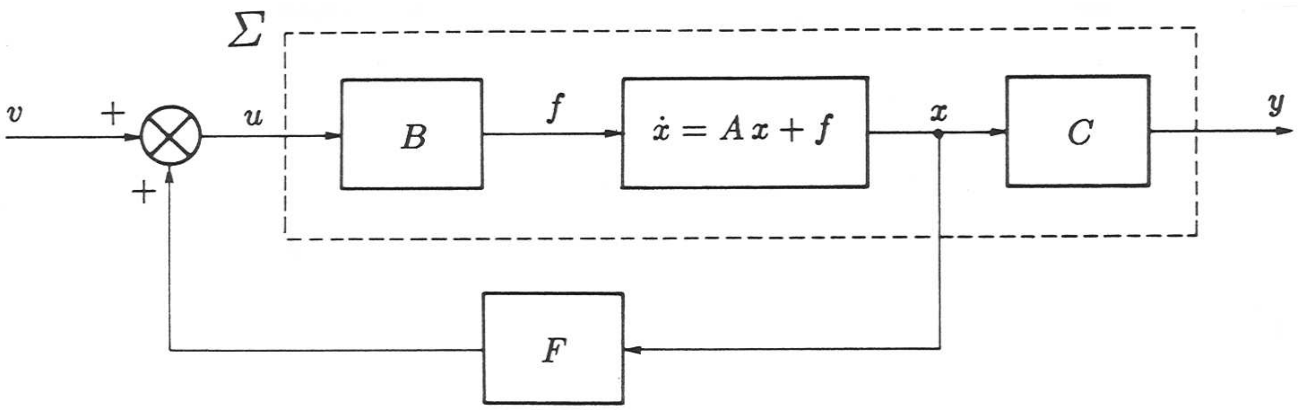
Indice ed errata corrige: http://sting.deis.unibo.it/tds/Corso/Testi/Testi.htm

Giovanni Marro - Teoria dei sistemi: Fondamenti, Patron, Bologna.

(Il testo è fuori stampa ma è disponibile nella biblioteca Dore della Facoltà di Ingegneria)

5.1 Retroazione e assegnabilità degli autovalori

Con il termine *retroazione* si intende un collegamento tra l'uscita e l'ingresso oppure tra lo stato (se accessibile) o lo stato stimato tramite osservatore e l'ingresso in un sistema dinamico. Un collegamento di questo tipo influisce in modo determinante sulla stabilità e sulla prontezza di risposta del sistema sul quale viene effettuato.



Retroazione stato–ingresso

Si consideri la retroazione stato–ingresso; il sistema retroazionato presenta un nuovo ingresso $v \in \mathcal{R}^p$ ed è descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = (A + B\,F)\,x(t) + B\,v(t) \tag{1}$$

$$y(t) = C\,x(t) \tag{2}$$

da cui risulta che la matrice dinamica del sistema retroazionato è $A+BF$. Scegliendo opportunamente la matrice F si può fare in modo che il nuovo sistema (1–2) presenti caratteristiche diverse da quelle del sistema originario.

Teorema (assegnabilità degli autovalori): Sia $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ un insieme arbitrario di n numeri complessi con la proprietà che $\rho \in \Lambda$ implichi $\rho^* \in \Lambda$. Esiste almeno una matrice reale F tale che gli autovalori di $A+BF$ coincidano con gli elementi di Λ se e solo se (A, B) è raggiungibile.

La retroazione stato–ingresso consente quindi, attraverso la modifica degli autovalori, di influire sulla stabilità. Valgono inoltre le seguenti proprietà:

Proprietà – La retroazione stato–ingresso in un sistema dinamico:

1) non influisce sulla raggiungibilità;

2) può influire sull'osservabilità;

3) può modificare la struttura della matrice $A+BF$ rispetto a quella di A, variando il numero e le dimensioni dei blocchi di Jordan.

5.2 Osservatori asintotici dello stato e proprietà di separazione

I cosiddetti *osservatori asintotici* dei sistemi dinamici lineari e stazionari sono sistemi dinamici dello stesso tipo che, collegati all'ingresso ed all'uscita del sistema da osservare, forniscono una stima asintotica dello stato, cioè presentano un'uscita che tende asintoticamente allo stato del sistema osservato; trascorso un certo tempo di assestamento, si disporrà di un segnale $z(t)$ riproducente l'andamento dello stato $x(t)$ del sistema osservato.

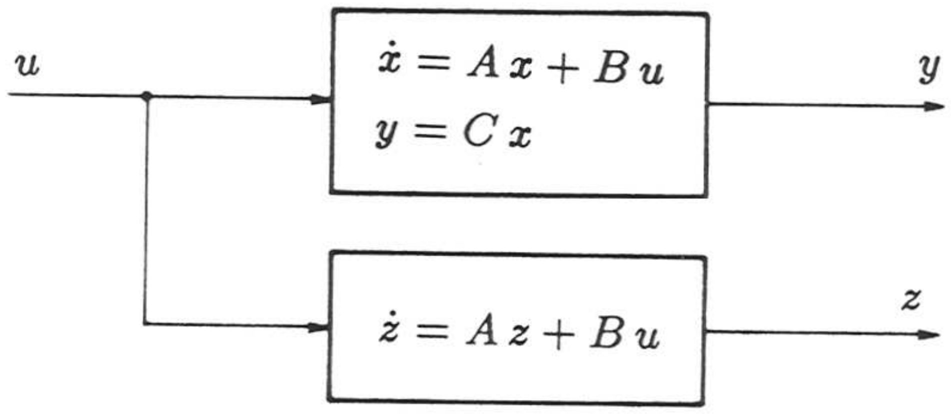
Si consideri un sistema lineare puramente dinamico. Se esso è asintoticamente stabile, cioè se gli autovalori di A sono tutti a parte reale negativa, una stima asintotica dello stato z (ricostruzione dello stato) si può ottenere inviando l'ingresso ad un *modello* del sistema, retto dalla medesima equazione differenziale, cioè

$$\dot{z}(t) = A\,z(t) + B\,u(t)\ . \tag{3}$$

Un osservatore di tale tipo presenta due inconvenienti:

1) non si può applicare se il sistema è instabile;

2) non consente di influire sulla prontezza della stima, cioè sulla velocità con cui la stima dello stato tende ad eguagliare lo stato effettivo.



Stima dello stato ottenuta con un modello

Indicando con e l'*errore di stima*, definito da

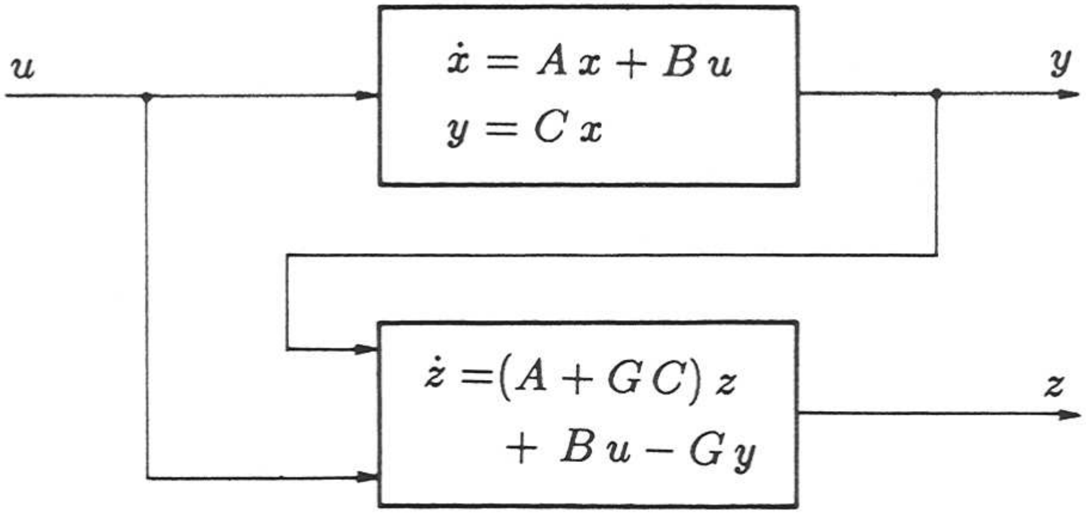
$$e(t) = z(t) - x(t) \tag{4}$$

e sottraendo l'equazione di stato dalla (3) si ottiene

$$\dot{e}(t) = A\,e(t)\ , \tag{5}$$

equazione che mostra come l'errore si evolva nel tempo con andamento dipendente dagli autovalori di A e tenda a zero, qualunque sia il suo valore iniziale, se e solo se tali autovalori hanno parte reale negativa.

Un osservatore asintotico privo degli inconvenienti precedenti può essere ottenuto ricavando informazione anche dall'uscita del sistema.



Stima dello stato con osservatore asintotico

Un tale osservatore viene chiamato *osservatore identità* perché il suo stato tende ad essere identico a quello del sistema osservato. L'equazione differenziale che ne descrive il comportamento è

$$\dot{z}(t) = (A + G\,C)\,z(t) + B\,u(t) - G\,y(t)\ . \tag{6}$$

La matrice G che appare nella precedente equazione è arbitraria: l'osservatore precedente (costituito da un modello del sistema) si ricava come caso particolare ponendo $G = O$.

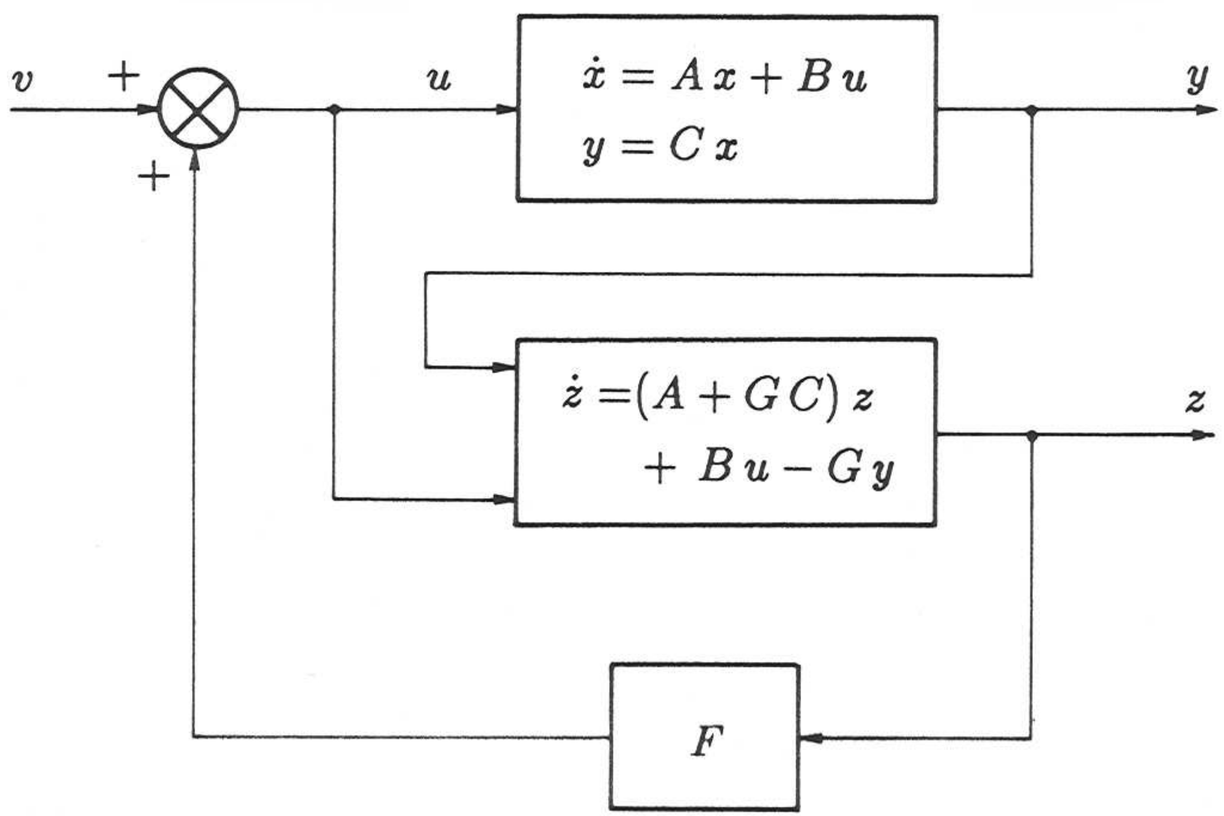
Sottraendo l'equazione di stato dalla (6) si ottiene per l'andamento dell'errore di stima l'equazione differenziale

$$\dot{e}(t) = (A + G\,C)\,e(t) \tag{7}$$

e, nell'ipotesi di completa osservabilità del sistema, la stima può essere resa arbitrariamente pronta operando una scelta opportuna della matrice G. La scelta di G consente infatti, in tale caso, di assegnare ad arbitrio gli autovalori di $(A + G\,C)$ come enunciato dal seguente teorema.

Teorema – Ad ogni sistema lineare stazionario continuo completamente osservabile si può associare un osservatore dello stato il cui errore di stima si evolve nel tempo come lo stato di un sistema dinamico libero di ordine n con matrice dinamica assegnabile ad arbitrio.

Qualora il sistema non sia completamente osservabile, scegliendo opportunamente G si possono modificare solo gli autovalori di A che non siano interni al sottospazio di inosservabilità $\mathcal{E}^-(0,0)$.



Impiego di un osservatore asintotico per realizzare la retroazione stato–ingresso

Utilizzando la stima dello stato fornita da un osservatore identità in luogo dello stato vero per eseguire un collegamento di retroazione si ottiene un sistema dinamico di ordine $2n$ retto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,F\,z(t) + B\,v(t) \tag{8}$$

$$\dot{z}(t) = (A + B\,F + G\,C)\,z(t) - G\,C\,x(t) + B\,v(t) \tag{9}$$

$$y(t) = C\,x(t)\ . \tag{10}$$

Vale il seguente risultato detto *proprietà di separazione*.

Teorema (proprietà di separazione dell'assegnabilità degli autovalori) – Gli autovalori del sistema che si ottiene utilizzando la stima dello stato fornita da un osservatore identità per realizzare una retroazione stato–ingresso sono l'unione (con ripetizione) di quelli che si avrebbero eseguendo direttamente la retroazione stato–ingresso e di quelli dell'osservatore.

Dimostrazione: Posto $e(t)=z(t)-x(t)$, applicando la trasformazione

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \ \text{con}\ T = \begin{bmatrix} I_n & O \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}\ , \tag{11}$$

si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B\,F & B\,F \\ O & A + G\,C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} v(t)\;. \tag{12}$$

Lo spettro della matrice del sistema (12) è evidentemente $\sigma(A+BF) \uplus \sigma(A+GC)$ ed è identico a quello del sistema originario, per la nota proprietà delle trasformazioni di similitudine.

Nel caso di completa raggiungibilità e completa osservabilità di un sistema dinamico tutti gli autovalori del sistema complessivo sono assegnabili ad arbitrio. In particolare si può affermare che qualunque sistema lineare stazionario di ordine n completamente raggiungibile ed osservabile è sempre stabilizzabile con un collegamento di retroazione uscita–ingresso attraverso un opportuno sistema dinamico, pure di ordine n.

5.3 Rappresentazioni ingresso–uscita

Si consideri un sistema Σ lineare stazionario continuo con ingresso $u \in \mathcal{R}^p$ e uscita $y \in \mathcal{R}^q$. Una tipica *rappresentazione ingresso–uscita* di Σ è un'equazione differenziale del tipo

$$\sum_{i=0}^{\mu} Q_i \, \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} \, y(t) = \sum_{i=0}^{\mu} P_i \, \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} \, u(t) \tag{13}$$

in cui P_i e Q_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ indicano matrici reali di dimensioni $q \times p$ e $q \times q$ rispettivamente; in particolare, Q_μ è assunta nonsingolare. L'intero μ è detto *ordine* della rappresentazione.

L'equazione differenziale (13) ha un significato solo se le funzioni di ingresso e uscita sono derivabili almeno μ volte. Per una notazione più semplice si introduce l'operatore differenziale s definito da

$$s\, x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, x(t) \,, \quad s^2\, x(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \, x(t) \,, \; \ldots \;; \tag{14}$$

usando tale operatore la (13) può essere scritta nella forma

$$\sum_{i=0}^{\mu} Q_i \, s^i \, y(t) = \sum_{i=0}^{\mu} P_i \, s^i \, u(t) \tag{15}$$

o, più semplicemente

$$Q(s)\,y(t) = P(s)\,u(t) \tag{16}$$

in cui $P(s)$ e $Q(s)$ indicano matrici polinomiali definite da

$$P(s) = \sum_{i=0}^{\mu} P_i\,s^i\,, \quad Q(s) = \sum_{i=0}^{\mu} Q_i\,s^i\,. \tag{17}$$

Nel caso discreto una rappresentazione ingresso–uscita di Σ è un'equazione alle differenze del tipo

$$\sum_{i=0}^{\mu} Q_i\,y(k+i\,) = \sum_{i=0}^{\mu} P_i\,u(k+i\,) \tag{18}$$

in cui P_i e Q_i $(i=1,\ldots,\mu)$ indicano matrici reali con dimensioni $q\times p$ e $q\times q$ rispettivamente; in particolare, Q_μ è assunta nonsingolare. Anche in questo caso μ è detto *ordine* della rappresentazione. Per una notazione più semplice, facendo riferimento ad una generica successione $x(k\,)$ $(k=1,\ldots,n)$ si definisce l'operatore differenza z mediante le relazioni

$$z\,x(k\,) = x(k+1)\,, \quad z^2\,x(k\,) = x(k+2)\,,\ \ldots\,, \tag{19}$$

e, usando tale operatore, la (18) può essere scritta nella forma

$$Q(z)\, y(k\,) = P(z)\, u(k\,) \tag{20}$$

in cui $P(z)$ e $Q(z)$ sono le matrici polinomiali

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\mu} P_i\, z^i\;, \quad Q(z) = \sum_{i=0}^{\mu} Q_i\, z^i\;. \tag{21}$$

Per i sistemi ad un solo ingresso ed una sola uscita ($p = q = 1$), le equazioni (16) e (20) relative al caso continuo e discreto, si possono scrivere anche nella forma

$$y(t) = \frac{P(s)}{Q(s)}\, u(t)\;, \quad y(k\,) = \frac{P(z)}{Q(z)}\, u(k\,)\;. \tag{22}$$

Questi rapporti sono detti *funzioni di trasferimento* dei sistemi cui si fa riferimento e costituiscono una rappresentazione completa del loro comportamento dinamico da stato zero.

Si noti che nelle funzioni di trasferimento il grado del polinomio a numeratore non è maggiore di quello del polinomio a denominatore, se si considerano sistemi causali, la cui risposta non dipenda cioè da ingressi non ancora applicati.

Le radici delle equazioni polinomiali

$$P(s) = 0 \quad \text{o} \quad P(z) = 0 \tag{23}$$

$$Q(s) = 0 \quad \text{o} \quad Q(z) = 0 \tag{24}$$

si dicono rispettivamente *zeri* e *poli* della funzione di trasferimento $P(s)/Q(s)$ oppure $P(z)/Q(z)$. Per sistemi a molti ingressi e molte uscite le (16) e (20) si possono scrivere nella forma

$$y(t) = Q^{-1}(s)\,P(s)\,u(t) \quad \text{con} \;\; Q^{-1}(s) = \frac{\text{agg}\,Q(s)}{\det Q(s)} \tag{25}$$

$$y(k) = Q^{-1}(z)\,P(z)\,u(k) \quad \text{con} \;\; Q^{-1}(z) = \frac{\text{agg}\,Q(z)}{\det Q(z)} \tag{26}$$

Ciascun elemento delle funzioni di trasferimento o *matrici di trasferimento*

$$G(s) = Q^{-1}(s)\,P(s) \;\; \text{e} \;\; G(z) = Q^{-1}(z)\,P(z) \tag{27}$$

è un rapporto di polinomi, e rappresenta la funzione di trasferimento che pone in relazione l’ingresso e l’uscita corrispondenti rispettivamente alla colonna ed alla riga in cui si trova.

Nel caso multivariabile i *poli* sono le radici delle equazioni polinomiali $\det Q(s)=0$ o $\det Q(z)=0$, mentre l'estensione del concetto di zero conduce alla definizione degli *zeri di trasmissione*.

5.4 Relazioni fra rappresentazioni nello spazio degli stati e di ingresso–uscita

Teorema – Ogni sistema lineare stazionario continuo ammette una rappresentazione del tipo (16), in cui μ è il grado del polinomio minimo della matrice dinamica A.

Dimostrazione: Si considerino le derivate rispetto al tempo dell'equazione di uscita $y(t) = Cx(t) + Du(t)$; sostituendo alle derivate di $x(t)$ i valori ottenuti derivando l'equazione di stato $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\\
s\,y(t) &= C\,A\,x(t) + C\,B\,u(t) + D\,s\,u(t)\\
s^2\,y(t) &= C\,A^2\,x(t) + C\,A\,B\,u(t) + C\,B\,s\,u(t) + D\,s^2\,u(t)\\
&\cdots\cdots\\
s^\mu\,y(t) &= C\,A^\mu\,x(t) + \sum_{j=1}^{\mu-1} C\,A^j\,B\,s^{\mu-j-1}\,u(t) + D\,s^\mu\,u(t)
\end{aligned} \tag{28}$$

Sia $\lambda^{\mu}+q_1\lambda^{\mu-1}+\ldots+q_{\mu}$ il polinomio minimo di A. Si moltiplichi la prima delle precedenti relazioni per q_{μ}, la seconda per $q_{\mu-1}$ e così via; la penultima sarà moltiplicata per q_1. Sommando membro a membro, si ottiene

$$s^{\mu}\, y(t) + \sum_{i=1}^{\mu} q_i\, s^{\mu-i}\, y(t) = \sum_{i=1}^{\mu} P_i\, s^i\, u(t) \tag{29}$$

in cui con P_i $(i=1,\ldots,\mu)$ si indicano matrici costanti $q\times p$. La rappresentazione ottenuta è del tipo (16).

Per i sistemi discreti si ottiene un risultato analogo sostituendo s con z.

Corollario – Ogni sistema lineare stazionario discreto ammette una rappresentazione di ingresso–uscita del tipo (20) in cui μ è il grado del polinomio minimo di A_d.

Dalla (29) si ricava immediatamente la matrice di trasferimento $G(s)$. Raccogliendo $y(t)$ al primo membro e dividendo per il polinomio minimo si ottiene

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{\mu} P_i\, s^i}{s^{\mu} + \sum_{i=1}^{\mu} q_i\, s^{\mu-i}}\ . \tag{30}$$

Si noti che ogni elemento a secondo membro è una funzione razionale propria. Un procedimento alternativo per ricavare la matrice di trasferimento del sistema direttamente dalle equazioni di stato consiste nello scrivere le equazioni del sistema nella forma

$$s\,x(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{31}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \tag{32}$$

da cui

$$x(t) = (sI - A)^{-1}\,B\,u(t) \tag{33}$$

$$y(t) = \big(C\,(sI - A)^{-1}\,B + D\big)\,u(t) \tag{34}$$

e infine

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D = \frac{1}{\det(sI - A)}\,C\,\mathrm{agg}(sI - A)\,B + D\,. \tag{35}$$

Le funzioni razionali nella matrice (35) sono strettamente proprie, poiché $\det(sI - A)$ è un polinomio di grado n e $C\,\mathrm{agg}(sI - A)\,B$ è una matrice polinomiale i cui elementi hanno gradi minori o uguali a $n - 1$. L'eventuale differenza fra il grado del polinomio a denominatore della (30) e quello della (35) è dovuta a possibili cancellazioni di fattori comuni nel numeratore e nel denominatore delle frazioni polinomiali.

5.5 Realizzazione di una risposta impulsiva

Con il termine *realizzazione* si intende la deduzione di un modello nello spazio degli stati per un sistema dinamico a partire da un modello di ingresso–uscita oppure da sequenze di ingresso–uscita rilevate sul sistema; in quest'ultimo caso ci si riferisce normalmente a modelli a tempo discreto. Un classico problema di realizzazione è quello che fa riferimento ai campioni della risposta impulsiva.

Problema – Assegnati i campioni della risposta impulsiva del modello discreto di un sistema puramente dinamico, $W(1)$, $W(2)$, $\ldots$, determinare una terna A_d, B_d, C_d che descriva un sistema dinamico di ordine minimo con la risposta impulsiva assegnata.

Soluzione – Si costruisca la matrice di Hankel di campioni della risposta impulsiva data

$$M = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) & W(3) & \ldots \\ W(2) & W(3) & W(4) & \ldots \\ W(3) & W(4) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \tag{36}$$

e si calcoli il rango delle sottomatrici

$$M_2 = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) \\ W(2) & W(3) \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) & W(3) \\ W(2) & W(3) & W(4) \\ W(3) & W(4) & W(5) \end{bmatrix} \quad \ldots; \tag{37}$$

si otterrà, in generale, la sequenza crescente 2, 3, $\ldots$, n, n, $\ldots$ che si stabilizza all'ordine minimo, n, dei sistemi in grado di generare la sequenza assegnata. Si consideri ora la matrice

$$M_{n+1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_{n+1} \end{bmatrix} \tag{38}$$

e si esprima la sua ultima riga come combinazione lineare delle precedenti attraverso la relazione

$$r_{n+1} = \alpha_0\, r_1 + \alpha_1\, r_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\, r_n\ . \tag{39}$$

Realizzazioni di ordine minimo della risposta impulsiva considerata sono descritte dalle terne

$$A'_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \end{bmatrix} \qquad B'_d = \begin{bmatrix} W(1) \\ W(2) \\ \vdots \\ W(n) \end{bmatrix}$$

$$C'_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} . \tag{40}$$

$$A''_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B''_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C''_d = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) & \dots & W(n) \end{bmatrix} . \tag{41}$$

Si osservi che il polinomio caratteristico di A'_d e di A''_d è

$$p(\lambda) = \lambda^n - \alpha_{n-1}\,\lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_1\,\lambda - \alpha_0 \; . \tag{42}$$

Dimostrazione: Essendo, per un sistema discreto, $W(k) = C_d\,A_d^{k-1}\,B_d$ per $k > 0$, la matrice (36) è data da

$$M = \begin{bmatrix} C_dB_d & C_dA_dB_d & C_dA_d^2B_d & \dots \\ C_dA_dB_d & C_dA_d^2B_d & C_dA_d^3B_d & \dots \\ C_dA_d^2B_d & C_dA_d^3B_d & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \; ; \tag{43}$$

l'ordine del modello viene determinato come il più piccolo intero compatibile con la relazione

$$A_d^n = \alpha_0\,I + \alpha_1\,A_d + \cdots + \alpha_{n-1}A_d^{n-1} \; . \tag{44}$$

È poi immediato verificare che per A'_d, B'_d, C'_d e per A''_d, B''_d, C''_d risulta, per costruzione,

$$C'_d\,{A'}_d^{k-1}\,B'_d = C''_d\,{A''}_d^{k-1}\,{B''}_d = W(k) \;\text{ per }\; k = 1, 2, \dots, n \; ; \tag{45}$$

la validità della stessa relazione per $k > n$ deriva poi dalla (44).